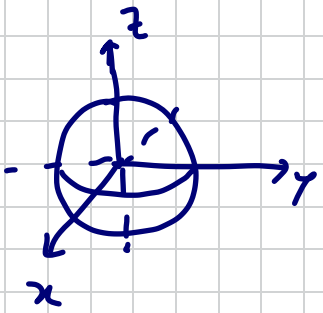
Continuando com exemplos de integrais em coordenadas esféricas:

02) Calcule $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dV$, sendo $\Omega$ a região dada por $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

**Solução:** A região de integração é uma esfera unitária centrada na origem.




Neste caso, temos:

$0 \leq \rho \leq 1$.

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 \leq \varphi \leq \pi$

Além disso, sabe-se que: $x^2+y^2+z^2 = \rho^2$.

Logo:

$$\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dV =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=1} e^{(\rho^2)^{\frac{3}{2}}} \rho^2 \cdot \operatorname{sen}\varphi \cdot d\rho\, d\varphi\, d\theta =$$

↳ devido à mudança. (jacobiana)

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi \cdot \frac{1}{3} \int_{\rho=0}^{\rho=1} e^{\rho^3} 3\rho^2 d\rho$$

$u = \rho^3$

$du = 3\rho^2 d\rho$

$$= \theta\Big|_0^{2\pi} \cdot (-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi} \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{\rho^3}\Big|_0^1$$

$$= 2\pi \cdot (\underbrace{-\cos\pi}_{\substack{-1 \\ 1}} + \cos 0) \cdot \frac{1}{3} \cdot (e^1 - e^0)$$

$$= 2\pi \cdot (1+1) \cdot \frac{1}{3} \cdot (e-1) = \frac{4\pi}{3}(e-1)$$

---

03) Use coordenadas esféricas para determinar o volume do sólido acima do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e abaixo da esfera $x^2+y^2+z^2 = z$.

SOLUÇÃO: Note que:

$$x^2+y^2+z^2 = z \iff x^2+y^2+z^2-z = 0$$

VAMOS COMPLETAR UM QUADRADO PERFEITO.

$$\iff x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$z^2 - z \equiv (z+a)^2 + b$$

$$z^2 - z \equiv z^2 + 2az + a^2 + b$$

$$2a = -1 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$$

$$a^2 + b = 0$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + b = 0$$

$$\boxed{b = -\frac{1}{4}}$$

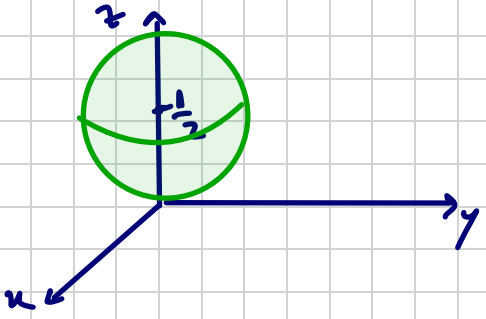
↓

esfera de raio $\frac{1}{2}$

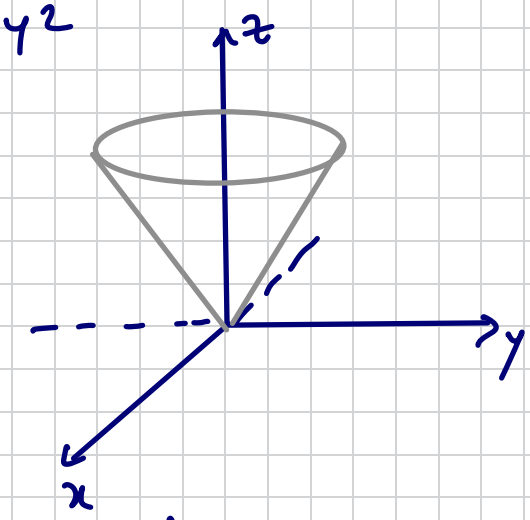
centrada em $C\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$

FORMA GERAL:

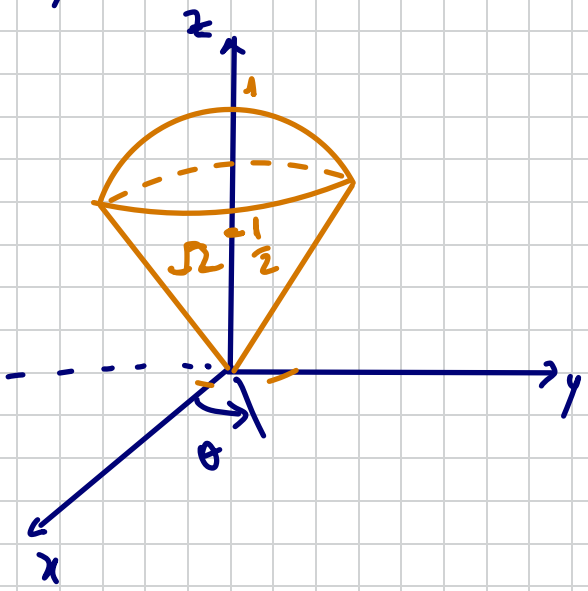
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = R^2$$



cone: $z = \sqrt{x^2+y^2}$




A região $\Omega$, acima do cone e abaixo da esfera, vem:




$0 \leq \theta \leq 2\pi$

(giro de 360° em torno do eixo z)

$0 \leq \rho \leq$ PONTOS SOBRE A REGIÃO ESFÉRICA.

$0 \leq \varphi \leq$ PONTOS SOBRE A CASCA DO CONE.

Vamos determinar os pontos sobre a casca do cone, para obtermos o limite superior de variação para o ângulo $\varphi$.

Sobre o cone temos:

$$z = \sqrt{x^2+y^2}$$ , e, pelas coordenadas esféricas, temos:

$$\rho\cos\varphi = \sqrt{(\rho\,\mathrm{sen}\varphi\cos\theta)^2 + (\rho\,\mathrm{sen}\varphi\,\mathrm{sen}\theta)^2}$$

$$\Rightarrow \rho\cos\varphi = \sqrt{\rho^2\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\theta + \rho^2\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$\Rightarrow \rho\cos\varphi = \sqrt{\rho^2\cdot\operatorname{sen}^2\varphi\,(\underbrace{\cos^2+\operatorname{sen}^2\theta}_{=1})}$$

$$\Rightarrow \rho\cos\varphi = \sqrt{\rho^2\operatorname{sen}^2\varphi}$$

$$\rho\cos\varphi = +\rho\operatorname{sen}\varphi \quad \Rightarrow \cos\varphi = \operatorname{sen}\varphi \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Logo, teremos a variação para $\varphi$:

$$\boxed{0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}.}$$

Do mesmo modo, vamos determinar os pontos sobre a casca da esfera, para obtermos o limite de variação superior para o raio $\rho$.

Da eq. da esfera, temos:

$$\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{\rho^2} = \underbrace{z}_{=\rho\cos\varphi}$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 = \rho\cos\varphi \quad \Leftrightarrow \boxed{\rho = \cos\varphi}$$

Assim, obtemos:

$$\boxed{0 \le \rho \le \cos\varphi}$$

Dito, obtemos:

$$V = \iiint_{\Omega} dV = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}}\int_{\rho=0}^{\rho=\cos\varphi} \rho^2\cdot\operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}\varphi \left( \int_{\rho=0}^{\rho=\cos\varphi} \rho^2 \, d\rho \right) d\varphi = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}\varphi \left( \frac{\rho^3}{3} \right) \Big|_0^{\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}\varphi \cdot \frac{\cos^3\varphi}{3} \, d\varphi = \theta \Big|_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{3}\right) \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} (\cos\varphi)^3 \cdot (-\operatorname{sen}\varphi \, d\varphi)$$

$\int u^k \, du$

$u = \cos\varphi$

$\hookrightarrow du = -\operatorname{sen}\varphi \, d\varphi$

$$= -\frac{2\pi}{3} \cdot \left( \frac{\cos^4\varphi}{4} \right) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -\frac{\pi}{6} \cdot \left( \cos^4\frac{\pi}{4} - \cos^4 0 \right) = -\frac{\pi}{6} \cdot \left( \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - (1)^4 \right)$$

$$= -\frac{\pi}{6} \cdot \left( \frac{4}{16} - 1 \right) = -\frac{\pi}{6} \left( \frac{1}{4} - 1 \right) = -\frac{\pi}{6} \cdot \left( -\frac{3}{4} \right)$$

$$= +\frac{\pi}{8} \text{ u.v.}$$

# CAPÍTULO FINAL: CAMPOS VETORIAIS

**Def.:** Um campo vetorial é uma função

$$\vec{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mapsto (f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_m))$$

Por exemplo, na Álgebra linear, os operadores lineares $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ são campos vetoriais.

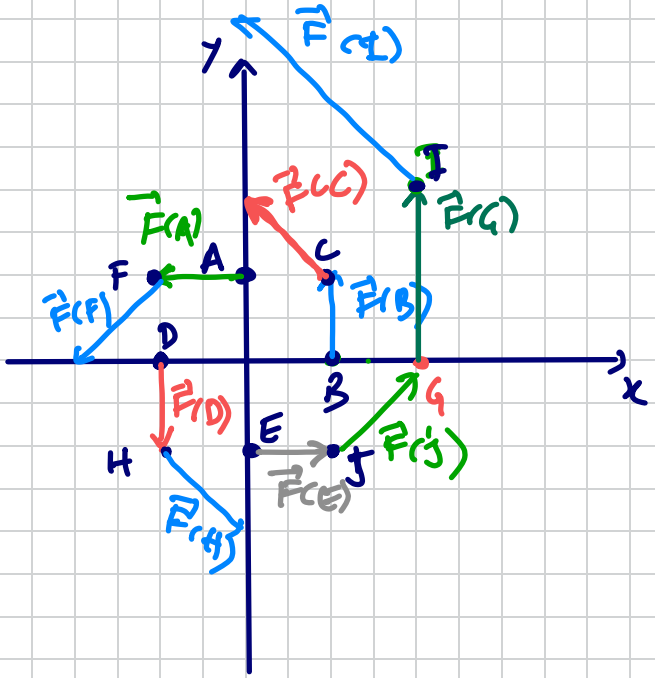
Como da Geometria Analítica, todo ponto está associado a um vetor e vice-versa, um campo vetorial pode ser visto mandando um ponto para um vetor.

**Ex.:** $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por:

$$\vec{F}(x, y) = (-y, x).$$

Vamos marcar alguns pontos para desenhar este campo vetorial $\vec{F}$:

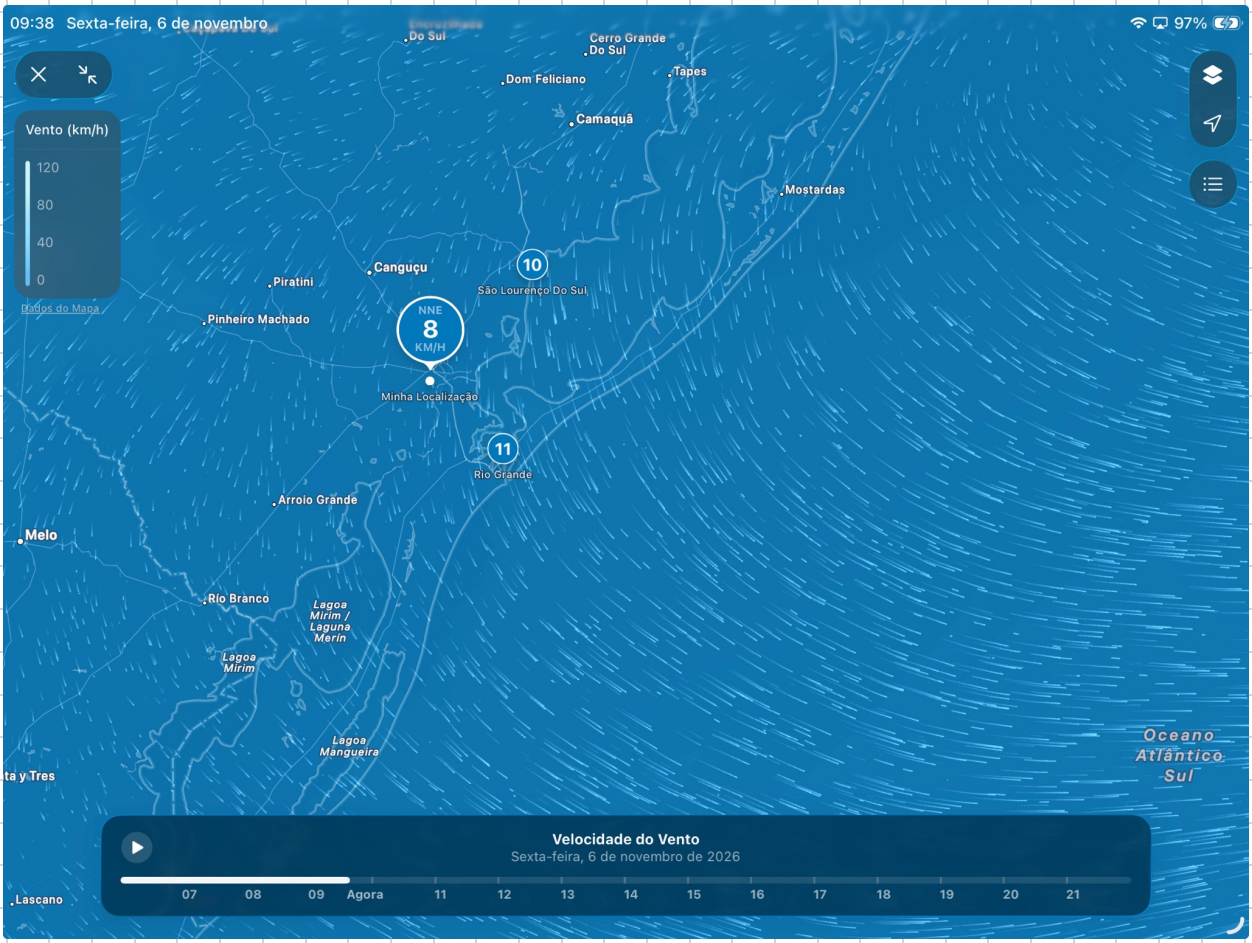
| | $\vec{F}$: |
|---|---|
| $A(0,1)$ | $\vec{F}(A) = (-1, 0)$ |
| $B(1,0)$ | $\vec{F}(B) = (0, 1)$ |
| $C(1,1)$ | $\vec{F}(C) = (-1, 1)$ |
| $D(-1,0)$ | $\vec{F}(D) = (0, -1)$ |
| $E(0,-1)$ | $\vec{F}(E) = (1, 0)$ |
| $F(-1,1)$ | $\vec{F}(F) = (-1, -1)$ |
| $G(2,0)$ | $\vec{F}(G) = (0, 2)$ |



$H(-1,-1) \mid \vec{F}(H) = (1,-1)$

$I(2,2) \mid \vec{F}(I) = (-2,2)$

$J(1,-1) \mid \vec{F}(J) = (1,1)$




UMA APLICAÇÃO DE CAMPOS VETORIAIS: ANÁLISE DE UM CAMPO DE VENTOS.