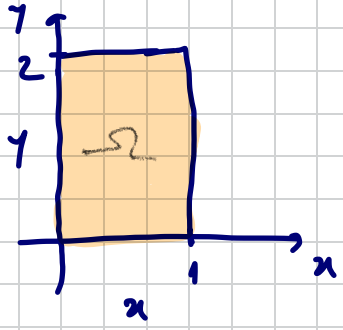
CÁLCULO3

04/11/26 - AULA 30

Na aula passada estudamos, entre vários assuntos, a integral dupla em retângulos. Vejamos outros exemplos:

01) Calcule $\iint_{\Omega} (x^2+y^2)\,dA$, sendo $\Omega = [0,1]\times[0,2]$.



Solução:

$dA = dx\,dy$ ou $dy\,dx$

$$\iint_{\Omega} (x^2+y^2)\,dA = \int_{y=0}^{y=2}\left(\int_{x=0}^{x=1} (x^2+y^2)\,.\,dx\right)dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=2}\left(\frac{x^3}{3} + y^2 x\right)\Big|_{x=0}^{x=1} .dy = \int_{y=0}^{y=2}\left(\frac{1}{3} + y^2 - 0 - 0\right)dy =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} + y^2\right)dy = \left(\frac{1}{3}y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{8}{3} - 0 - 0 = \frac{10}{3} \;//$$

---

02) Calcule $\iint_{\Omega} \cos(x-y)\,dA$; onde $\Omega = [0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]$

Solução:

$$\iint_{\Omega} \cos(x-y)\,dA = \int_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} \left(\int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \cos(x-y)\,dx \right) dy =$$

$u = x - y \Rightarrow du = dx$

$$= \int_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x-y) \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-y\right) - \operatorname{sen}(0-y) \right) dy =$$

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-y\right) = \cos y$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos y - \operatorname{sen}(-y) \right] dy = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos y + \operatorname{sen} y)\,dy =$$

$\operatorname{sen}(-y) = -\operatorname{sen} y$

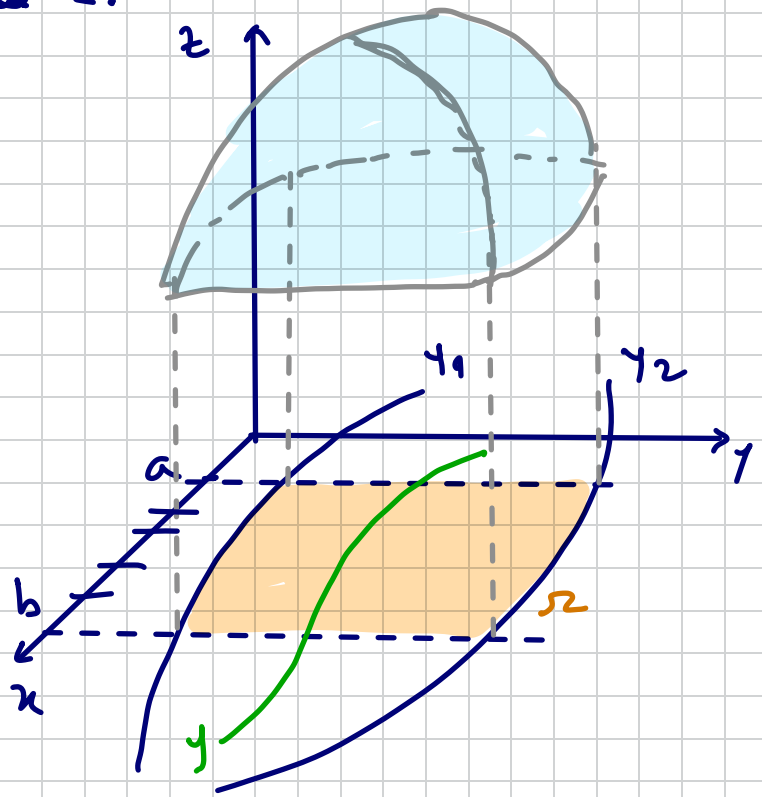
$$= (\operatorname{sen} y - \cos y) \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} - (\operatorname{sen} 0 - \cos 0)$$

$$= 1 - 0 - (0 - 1) = 1 + 1 = 2$$

CASO GERAL:

Quando a região Ω for delimitada por pelo menos uma curva.

Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrável e assuma que Ω é limitada por duas curvas γ_1 e γ_2 no intervalo $[a,b]$ no eixo x. Para dar um significado geométrico, considere $f \geq 0$ nessa região, e então $\iint_\Omega f$ representará o volume do sólido abaixo do gráfico de f na região Ω.



Considere uma curva γ entre γ_1 e γ_2 conforme desenho ao lado.

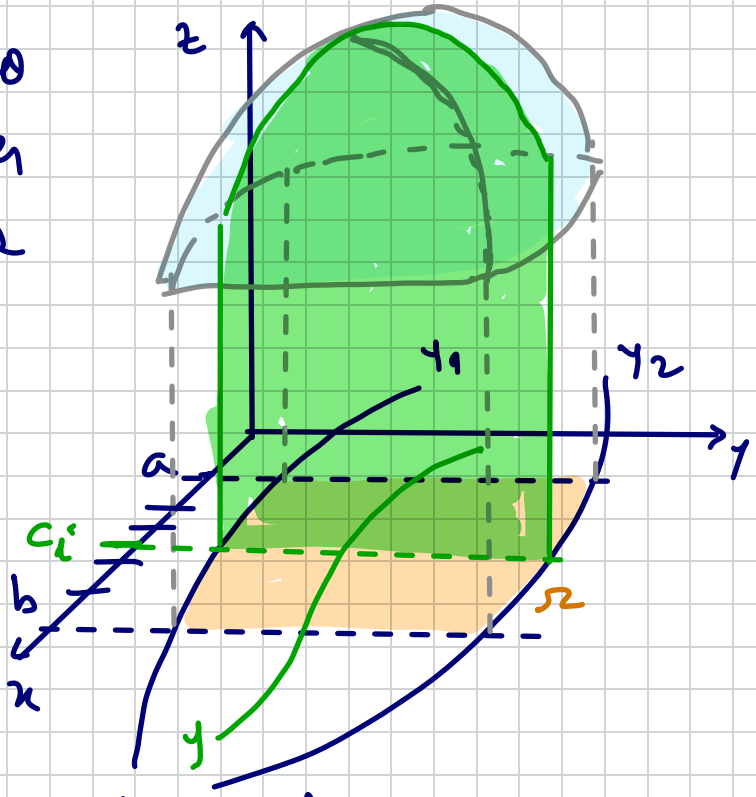
Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$ uma partição do intervalo $[a,b]$, dividindo-o em n subintervalos de comprimento $\Delta x_i = t_i - t_{i-1}$.

Seja $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ um ponto qualquer.

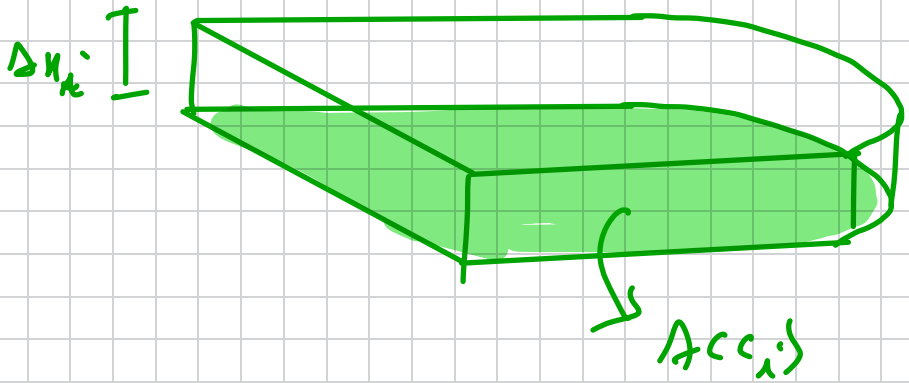
Efetuando um corte vertical em c_i, paralelo ao plano yz, vemos obter uma lâmina, cuja área será dada por

$$A(c_i) = \int_{y=y_1}^{y=y_2} f(c_i, y)\,dy$$

(x "CONGELADO" EM c_i)



Efetuando cortes como da partição P, vemos obter "fatias" da região abaixo do gráfico de f em Ω, com altura Δx_i:



O volume V_i de cada fatia será dado por:

$$V_i = A(c_i) \cdot \Delta x_i$$

O volume aproximado $\tilde{V}$ será dado por:

$$\tilde{V} = \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} A(c_i) \cdot \Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{y=y_1}^{y=y_2} f(c_i, y)\, dy \right) \Delta x_i \; ;$$

uma soma de Riemann

O volume V será:

$$V = \lim_{n \to \infty} \tilde{V} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{y=y_1}^{y=y_2} f(c_i, y)\, dy \right) \Delta x_i$$

$$= \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=y_1}^{y=y_2} f(x, y)\, dy \right) dx \; ,$$

uma integral iterada, sendo que no integrando mais externo sempre os limites de integração são constantes.

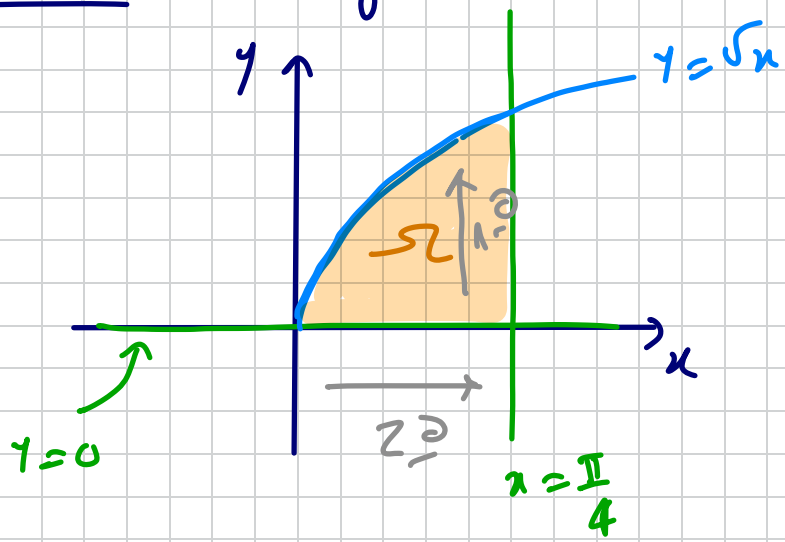
<u>Obs.</u>: Também poderíamos ter:

$$\int_{y=\alpha}^{y=\beta} \left(\int_{x=x_1}^{x=x_2} f(x, y)\, dx \right) dy$$

Vejamos exemplos de aplicação:

01) Calcule $\iint_{\Omega} \sqrt{x} \cdot \cos(y\sqrt{x})\, dx\, dy$, sendo Ω a região formada pelas retas $y=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ e pela curva $y=\sqrt{x}$.

Solução: A região Ω é:



$$\iint_{\Omega} \sqrt{x} \cdot \cos(y\sqrt{x})\, dx\, dy = \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} \int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} \sqrt{x} \cdot \cos(y\sqrt{x})\, dy\, dx$$

$\int \cos u\, du$

$$= \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} \left(\int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} \cos(\underbrace{y\sqrt{x}}_{u}) \cdot \left(\underbrace{\sqrt{x}\, dy}_{du}\right) \right) dx$$

$u = y\sqrt{x}$

$du = \sqrt{x}\, dy$

$$= \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(y\sqrt{x}) \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} \left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\right) - \operatorname{sen} 0 \right) dx =$$

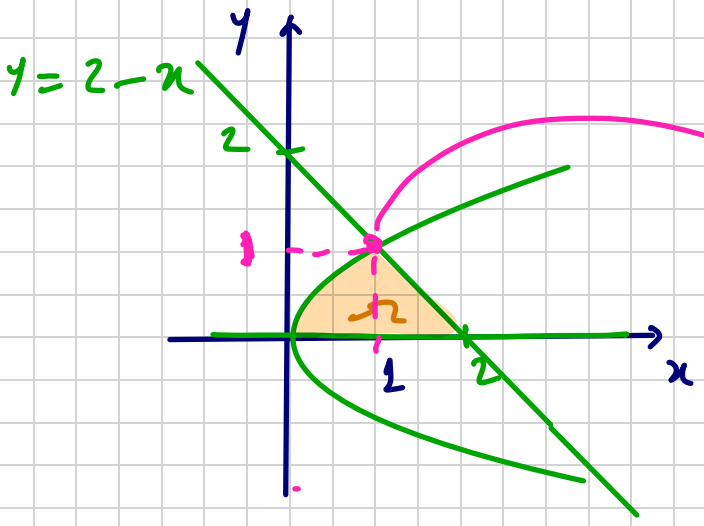
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -\cos\frac{\pi}{4} - (-\cos 0) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \quad //$$

---

02) Calcule $\iint_{\Omega} x\sqrt{y}\, dA$, onde Ω é a região formada pelas retas $y=0$, $x+y=2$ e pela parábola $x=y^2$, no 1º q.

Solução: O desenho da região de integração Ω será:



$y = 2-x$

interceptos: onde $x = x$:

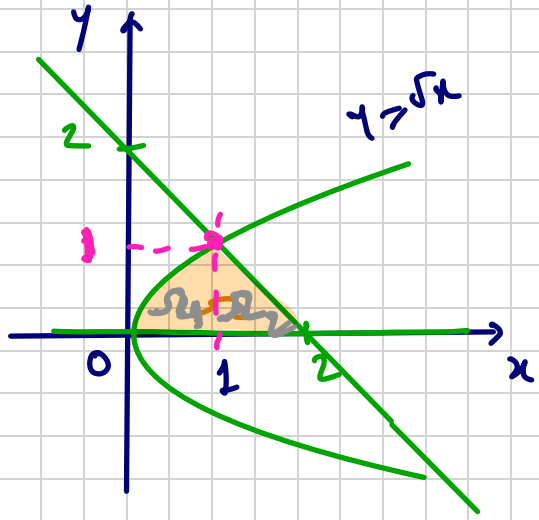
$y^2 = 2 - y$

$y^2 + y - 2 = 0$

$y = 1$

Observamos que este problema pode ser feita de duas formas:

1º:

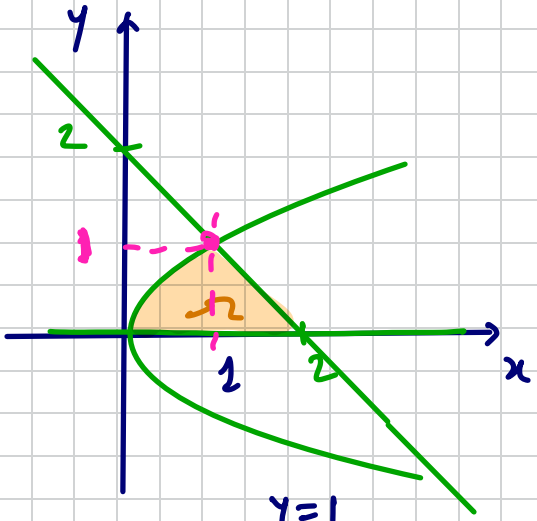


$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$

$$\iint_\Omega f = \iint_{\Omega_1} f + \iint_{\Omega_2} f =$$

$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} f \, dy\, dx + \int_{x=1}^{x=2} \int_{y=0}^{y=2-x} dy\, dx$$

2º:



$$\iint_\Omega f = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=y^2}^{x=2-y} f \, dx\, dy$$

Obviamente o caso 2 é mais prático, e é o que faremos. Assim:

$$\iint_\Omega x\sqrt{y}\, dA = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=y^2}^{x=2-y} x\sqrt{y}\, dx\, dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \sqrt{y} \left(\int_{x=y^2}^{x=2-y} x\, dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=1} \sqrt{y} \cdot \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=y^2}^{x=2-y} dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \sqrt{y} \cdot \left[\frac{(2-y)^2}{2} - \frac{y^4}{2} \right] dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{y} \left(4 - 4y + y^2 - y^4 \right) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(4\sqrt{y} - 4y\sqrt{y} + y^2\sqrt{y} - y^4\sqrt{y} \right) dy =$$

$$= \frac{4}{2} \int_0^1 y^{\frac{1}{2}} dy - \frac{4}{2} \int_0^1 y \cdot y^{\frac{1}{2}} dy + \frac{1}{2} \int_0^1 y^2 \cdot y^{\frac{1}{2}} dy - \frac{1}{2} \int_0^1 y^4 \cdot y^{\frac{1}{2}} dy$$

$$= 2 \int_0^1 y^{\frac{1}{2}} dy - 2 \int_0^1 y^{\frac{3}{2}} dy + \frac{1}{2} \int_0^1 y^{\frac{5}{2}} dy - \frac{1}{2} \int_0^1 y^{\frac{9}{2}} dy$$

$$= 2 \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2 \cdot \frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - \frac{1}{2} \frac{y^{\frac{11}{2}}}{\frac{11}{2}} \Bigg|_0^1$$

$$= \left(\frac{4}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5} y^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{7} y^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{11} y^{\frac{11}{2}} \right) \Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} - 0 = \dots = \frac{676}{1155}$$