05/11/26 – AULA 13

PROP: O isomorfismo de grupos é uma relação de equivalência.

DEMONSTR.: Dados G_1, G_2 e G_3 grupos.

Então, temos que:

(i) $G_1 \simeq G_1$. (ou seja, vale a reflexividade)

De fato, basta tomar

$$id : G_1 \to G_1;$$
$$id(x) = x$$

Claramente, id é bijetiva, e é um homomorfismo de grupos, pois.

$$id(a*b) = a*b = id(a) * id(b)$$

(ii) $G_1 \simeq G_2 \Rightarrow G_2 \simeq G_1$. (simetria)

De fato, se $G_1 \simeq G_2$, então,

$\exists\ f: G_1 \to G_2$ isomorfismo.

Logo, f é bijetiva. Então, $\exists\ g: G_2 \to G_1$ inversa de f, que é bijetiva. Além disso, g é um homomorfismo, conforme a

última proposição da aula passada.

Portanto, $g: G_2 \to G_1$ é isomorfismo, e, então, $G_2 \simeq G_1$.

(iii) Transitividade: Supomos que

$$G_1 \simeq G_2 \quad \text{e} \quad G_2 \simeq G_3.$$

A mostrar: $G_1 \simeq G_3$.

Como $G_1 \simeq G_2$ e $G_2 \simeq G_3$, existem

$f: G_1 \to G_2$ e $g: G_2 \to G_3$ isomorfismos.

Em particular, f e g são bijetivas.

Então, $g \circ f: G_1 \to G_3$ é bijetiva

Além disso, $g \circ f$ é um homomorfismo, pois é composição de homomorfismos.

Portanto, $g \circ f: G_1 \to G_3$ é um isomorfismo, ou seja, $G_1 \simeq G_3$.

□

TEOREMA DOS ISOMORFISMOS: Seja $f: G_1 \to G_2$ um homomorfismo de grupos. Então, a função induzida

$$\bar{f}: \frac{G_1}{\ker f} \to \mathrm{Im}(f) < G_2,$$

dada por $\bar{f}(g.\ker f) = f(g)$

é um isomorfismo.

$\bar{f}(\bar{g}) = f(g)$; onde $\bar{g} = g.\ker f$.

DEMONSTR.: Seja $f: G_1 \to G_2$ homomorfismo de grupos.

Defina $\bar{f}: \frac{G_1}{\ker f} \to \mathrm{Im}(f)$ por

$$\bar{f}(\bar{a}) = f(a)$$

Note que como o domínio é um conjunto de classes, precisamos verificar se esta função está bem definida, ou seja, mostrar a implicação:

$$\bar{a} = \bar{b} \implies \bar{f}(\bar{a}) = \bar{f}(\bar{b})$$

Como $\bar{a}, \bar{b} \in G_1/\ker f$, então,

$$\bar{a} = a.\ker f \quad \text{e} \quad \bar{b} = b.\ker f.$$

Assim, se impomos que $\bar{a} = \bar{b}$, então,

$$a \cdot \ker f = b \cdot \ker f .$$

Logo, $\exists\, k_1, k_2 \in \ker f$ tais que

$$\boxed{a \cdot k_1 = b \cdot k_2} \quad (*)$$

Como $\ker f < G_1$, então $\exists\, k_1^{-1}$ inverso de k_1.

Multiplicando $(*)$ à direita por k_1^{-1}, nos obtemos:

$$a \cdot \underbrace{k_1 \cdot k_1^{-1}}_{e} = b \cdot \underbrace{k_2 \cdot k_1^{-1}}_{\therefore\, k \in \ker f < G_1} ,$$

ou seja,

$$a = b \cdot k, \quad \text{onde } k \in \ker f.$$

Assim, teremos:

$$\bar{f}(\bar{a}) = f(a) = f(b \cdot k) = f(b) \cdot \underbrace{f(k)}_{= e' \text{, pois } k \in \ker f} =$$

(f é homomorf.)

$$= f(b) \cdot e' = f(b) = \bar{f}(\bar{b})$$

Logo, a função induzida $\bar{f}$ está bem definida.

Assim, para provar o teorema precisamos mostrar que $\bar{f}$ é um homomorfismo bijetivo (i.e., um isomorfismo).

Isto é feito nas seguintes afirmações:

AF-01: $\bar{f}$ é um homomorfismo de $G_1/\ker f$ em $\mathrm{Im}(f)$.

De fato, basta notar que:

$$\bar{f}(\bar{a}\cdot\bar{b}) = \bar{f}(\overline{a\cdot b}) = f(a\cdot b) = f(a)\cdot f(b) =$$

pois f é homomorfismo

$$= \bar{f}(\bar{a})\cdot\bar{f}(\bar{b}).$$

AF-02: $\bar{f}$ é injetiva:

Calculemos $\ker\bar{f}$.

$$\ker\bar{f} = \{\bar{x}\in G_1/\ker f : \bar{f}(\bar{x}) = e'\}$$

↳ neutro de G_2

$$= \{\bar{x}\in G_1/\ker f : f(x) = e'\}$$

$$= \{\bar{x}\in G_1/\ker f : x\in\ker f\} = \ker f =$$

$$= e\cdot\ker f = \bar{e}$$

$$\Longrightarrow \ker\bar{f} = \bar{e} = \ker f, \text{ ou seja,}$$

$\bar{f}$ é injetiva.

AF.03: $\bar{f} : G_1/\ker f \to \mathrm{Im}\, f$ é sobrejetiva:

De fato, dado $y \in \mathrm{Im}\, f$, precisamos encontrar um elemento em $G_1/\ker f$ tal que a $\bar{f}$ aplicado ao mesmo seja y.

Como $y \in \mathrm{Im}\, f$, então, $\exists\, x \in G_1$ tal que $f(x) = y$. Tome então a classe $\bar{x} = x.\ker f$ do x obtido. Assim:

$$\bar{f}(\bar{x}) = f(x) = y \in \mathrm{Im}\, f.$$

Ou seja, $\bar{f}$ é sobrejetiva.

Das afirmações 01, 02 e 03 segue que $\bar{f} : G_1/\ker f \to \mathrm{Im}(f)$ é um isomorfismo;

e disso, $G_1/\ker f \cong \mathrm{Im}(f)$.

□

EXEMPLOS: A função sinal é definida por:

$$\mathrm{sgn} : (\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot) \to (\{-1, 1\}, \cdot),$$

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Vamos mostrar que sgn é um homomorfismo do grupo $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$ para o grupo $(\{-1, 1\}, \cdot)$

De fato, dados $x, y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, então:

- $x, y > 0$:

$$\operatorname{sgn}(x \cdot y) = 1, \text{ e}$$

$$\operatorname{sgn}(x) = 1 \quad ; \quad \operatorname{sgn}(y) = 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn}(xy) = 1 = 1 \cdot 1 = \operatorname{sgn}(x) \cdot \operatorname{sgn}(y)$$

- $x, y < 0$; então

$$\operatorname{sgn}(x \cdot y) = 1 \; ; \text{ e}$$

$$\operatorname{sgn}(x) = -1 \; ; \; \operatorname{sgn}(y) = -1.$$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn}(x \cdot y) = 1 = (-1) \cdot (-1) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \operatorname{sgn}(y)$$

- $x > 0$ e $y < 0$; então:

$$\operatorname{sgn}(xy) = -1 \; ; \text{ e}$$

$$\operatorname{sgn}(x) = 1 \; ; \; \operatorname{sgn}(y) = -1.$$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn}(xy) = -1 = (1) \cdot (-1) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \operatorname{sgn}(y)$$

- $x < 0$ e $y > 0$; analogamente

Logo, sgn é um homomorfismo de

$$(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot) \longrightarrow (\{-1, 1\}, \cdot)$$

Claramente, sgn é sobrejetiva; ou seja,

$$\operatorname{Im}(\operatorname{sgn}) = \{-1, 1\}.$$

Queremos construir um isomorfismo. Já temos que $\operatorname{sgn} : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \{-1, 1\}$ é homomorfismo.

Logo, pelo T. de isomorfismos, $\exists$

$$\overline{\operatorname{sgn}} : \frac{\mathbb{R}\setminus\{0\}}{\ker(\operatorname{sgn})} \longrightarrow \underbrace{\operatorname{Im}(\operatorname{sgn})}_{= \{-1, 1\}}$$

isomorfismo

Calculemos $\ker(\operatorname{sgn})$:

$$\ker(\operatorname{sgn}) = \{ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} : \operatorname{sgn}(x) = \underbrace{1}_{= e'} \} =$$

$$= (0, +\infty) = \mathbb{R}^+$$

Assim, pelo teorema dos isomorfismos, conclui-se que

$$\frac{(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)}{(\mathbb{R}^+, \cdot)} \simeq (\{-1, 1\}, \cdot)$$

02) Considere o grupo $(U_n, \cdot)$, onde

$$U_n = \{ e^{\frac{2k\pi i}{n}} : k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \},$$

representando as raízes complexas n-ésimas da unidade. [FICA COMO EXERCÍCIO MOSTRAR QUE $(U_n, \cdot)$ É UM GRUPO].

Defina $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to (U_n, \cdot)$ por

$$\varphi(x) = e^{\frac{2\pi x i}{n}}$$

AF.: φ é um homomorfismo de grupos.

De fato, dados $a, b \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\varphi(a+b) = e^{\frac{2\pi (a+b) i}{n}} = e^{\frac{2\pi a i}{n} + \frac{2\pi b i}{n}} =$$

$$= e^{\frac{2\pi a \cdot i}{n}} \cdot e^{\frac{2\pi b i}{n}} = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$

Vamos calcular também o seu núcleo:

$$\ker \varphi = \{ x \in \mathbb{Z} : \varphi(x) = 1 \}$$

(1 = neutro de $(U_n, \cdot)$)

$$= \{ x \in \mathbb{Z} : e^{\frac{2\pi x i}{n}} = 1 \}$$

Porém, note que:

$$e^{\frac{2\pi x i}{n}} = \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi x}{n}\right)}_{1} + i \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{n}\right)}_{0} = 1$$

$\Leftrightarrow$ x for múltiplo de n

conclusão:

$$\ker\varphi = \{x \in \mathbb{Z} : x = k.n \ ; k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$= \{nk : k \in \mathbb{Z}\} = n.\mathbb{Z}.$$

Assim, pelo T. dos isomorfismos, segue que:

$$\exists\ \bar{\varphi} : \frac{\mathbb{Z}}{\ker\varphi} \longrightarrow \operatorname{Im}\varphi \quad \text{isomorfismo},$$

e como por construção φ é sobrejetiva, então, $\operatorname{Im}\varphi = U_n$. Assim:

$$\exists\ \bar{\varphi} : \frac{\mathbb{Z}}{\ker\varphi} \longrightarrow U_n \quad \text{isomorfismo},$$

ou seja,

$$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \simeq U_n$$

Obs.: Da Aritmética;

$$\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$$

COROLÁRIO 01: Se $f: G_1 \to G_2$ for um epimorfismo (ou seja, um homomorfismo sobrejetor), então

$$\frac{G_1}{\ker f} \simeq G_2.$$

DEMONSTR.: De fato, sendo epimorfismo, então, $\operatorname{Im} f = G_2$, e então, pelo T. dos isomorfismos segue que

$$\frac{G_1}{\ker f} \simeq \operatorname{Im} f = G_2.$$

□

COROLÁRIO 02: Sejam $f: G_1 \to G_2$ um homomorfismo de grupos e $H < G_1$. Então,

$$f(H) \cong \frac{H}{H \cap \ker f}.$$

DEMONSTR.: Seja $f: G_1 \to G_2$ um homomorfismo e seja $H < G_1$. Defina

$$f_H : H \to f(H)$$

a restrição de f em H. Por construção temos que f_H é sobrejetiva. Além disso, f_H ainda é um homomorfismo. De fato, $\forall\, h \in H$,

$f_H(h) = f(h)$, e então $\forall\, h_1, h_2 \in H$:

$$f_H(h_1 \cdot h_2) = f(h_1 \cdot h_2) = f(h_1) \cdot f(h_2) =$$

(f é homomorf.)

$$= f_H(h_1) \cdot f_H(h_2)$$

Então, pelo teorema dos isomorfismos segue que

$$\frac{H}{\ker f_H} \cong \operatorname{Im} f_H = f(H)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{H}{\ker f_H} \cong f(H)} \quad \text{(+)}$$

Resta mostrar apenas que $\ker f_H = H \cap \ker f$.

AF01: $\ker f_H \subset H \cap \ker f$.

Dado $\alpha \in \ker f_H$, então, $f_H(\alpha) = e$.

Além disso, $\alpha \in H$. Assim:

$$f(\alpha) = f_H(\alpha) = e \Rightarrow \alpha \in \ker f.$$

(pois $\alpha \in H$)

Logo, $\alpha \in H \cap \ker f$, provando a AF.01.

AF.02: $H \cap \ker f \subset \ker f_H$:

Dado $\alpha \in H \cap \ker f$, mostraremos que $\alpha \in \ker f_H$. Como $\alpha \in H \cap \ker f$, então temos que $\alpha \in H$ e $\alpha \in \ker f$., logo,

$$f_H(\alpha) = f(\alpha) = e \Rightarrow \alpha \in \ker f_H.$$

($\alpha \in H$)

Logo, vale a AF02.

Pelas afirmações 01 e 02 segue que

$$H \cap \ker f = \ker f_H.$$

Dimo, (*) fica:

$$H/_{\ker f_{|H}} \cong f(H)$$

$$\ker f_{|H} = H \cap \ker f$$

$$\Rightarrow \quad H/_{H \cap \ker f} \cong f(H).$$

□