GABARITO DA PROVA 1 DE ÁLGEBRA A.

01) $(\mathbb{R}, *)$:

$$a * b = a + b - 2$$

A mostrar: $(\mathbb{R}, *)$ é um grupo.

Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, temos:

(i) ASSOCIATIVIDADE:

$$a*(b*c) = a*(b+c-2) = a+(b+c-2)-2$$

$$= (a+b)+(c-2)-2 = (a+b-2)+c-2 =$$

$$= (a*b)+c-2 = (a*b)*c .$$

(ii) NEUTRO:

$$a * x = a \iff a + x - 2 = a$$

$$\iff x = 2$$

O neutro é $x = 2$.

(iii) SIMÉTRICO:

$$a * b = 2 \iff a + b - 2 = 2$$

$$\iff \boxed{b = -a + 4.}$$

1,0

Ou seja, o simétrico de a é $-a+4$, pois:

$$a * (-a+4) = a + (-a+4) + 2 =$$

$$= a - a + 2 = 2 = \text{neutro}.$$

Portanto, $(\mathbb{R}, *)$ é um grupo.

Resta verificar se é abeliano: (+0,5)

$$a*b = a+b-2 = b+a-2 = b*a.$$

Logo, $(\mathbb{R}, *)$ também é abeliano.

---

02) $H, K < G$.

(a) $H \cap K < G$:

Note que $H \cap K \neq \emptyset$, pois $e \in H$ e $e \in K$, onde e é o neutro de G. Logo, $e \in H \cap K$.

Dados $\alpha, \beta \in H \cap K$. Vamos mostrar que:

(i) $\alpha \cdot \beta \in H \cap K$

(ii) $\alpha^{-1} \in H \cap K$.

(1.0)

Como $\alpha, \beta \in H \cap K$, então $\alpha, \beta \in H$ e $\alpha\beta \in K$.

Como $H < G$, segue que

$$\alpha \cdot \beta \in H \quad \text{e} \quad \alpha^{-1} \in H. \qquad (*)$$

Do mesmo modo, como $\alpha, \beta \in K$ e $K < G$, segue que

$$\alpha \cdot \beta \in K \quad \text{e} \quad \alpha^{-1} \in K. \qquad (**)$$

De $(*)$ e $(**)$ segue que

$$\alpha \cdot \beta \in H \cap K \quad \text{e} \quad \alpha^{-1} \in K.$$

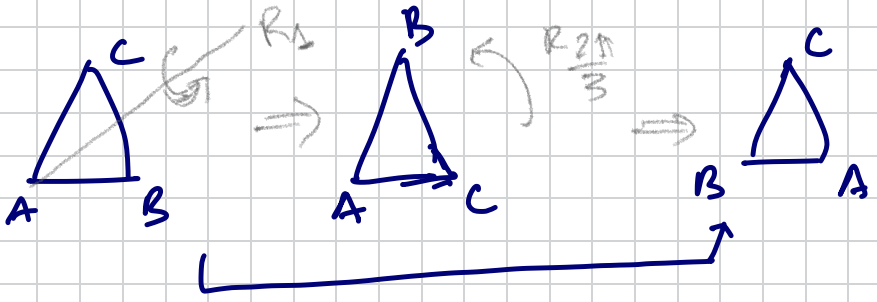
Logo, $H \cap K \leq G$.

(b) Por exemplo, sendo $G = S_\Delta$, sabemos que $H = \{id, R_1\}$ e $K = \{id, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}\}$ são subgrupos de S_Δ; mas

$H \cup K = \{id, R_1, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}\}$ não é subgrupo de S_Δ, pois, por exemplo,

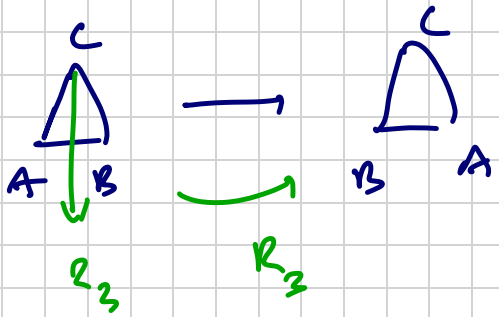
1.0

$R_1 \circ R_{\frac{2\pi}{3}} =$



$R_1 \circ R_{\frac{2\pi}{3}}$

No entanto:



$\Rightarrow R_1 \circ R_{\frac{2\pi}{3}} = R_3$

Ou seja, $H \cap K$ não é fechado.

Logo, $H \cap K \not\leq S_\Delta$.

03) $H < G$. $\quad f: G \to G$.

$f(x) = gxg^{-1}$, $g \in G$ fixado.

(a) $f(H) < G$.

Seja $f(H) = \{ f(h) : h \in H \}$.

Note que $f(H) \neq \emptyset$; pois, por exemplo:

$$f(e) = geg^{-1} = gg^{-1} = e \in H. \Rightarrow f(e) \in H.$$

Dados $\alpha, \beta \in f(H)$. Vamos mostrar que:

(i) $\alpha\beta \in f(H)$;

(ii) $\alpha^{-1} \in f(H)$.

Como $\alpha, \beta \in f(H)$, então $\alpha = f(h_1)$ e $\beta = f(h_2)$, com $h_1, h_2 \in H$. Assim:

- $\alpha \cdot \beta = f(h_1) \cdot f(h_2) = (gh_1g^{-1}) \cdot (gh_2g^{-1}) =$

$= gh_1(g^{-1}g)h_2g^{-1} = g(h_1h_2)g^{-1} \in f(H)$;

($g^{-1}g = e$; $h_1h_2 \in H < G$.)

(1,0)

- $\alpha^{-1} = (f(h_1))^{-1} = (gh_1g^{-1})^{-1} = (g^{-1})^{-1}h_1^{-1}g^{-1} =$

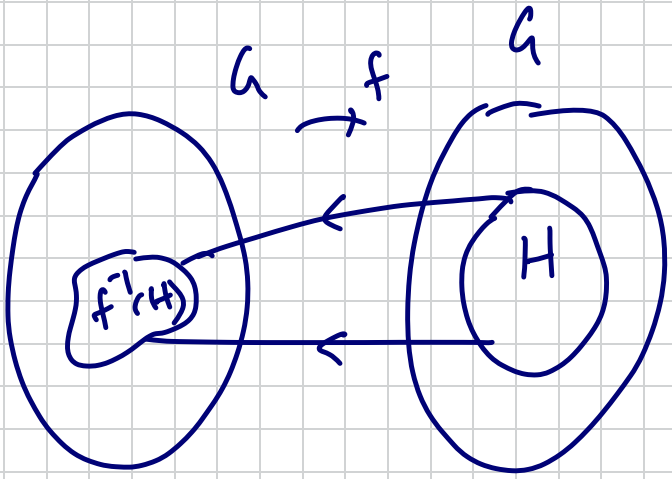
$= gh_1^{-1}g^{-1} \in f(H)$.

($h_1^{-1} \in H$)

Logo, $f(H) < G$.

(b) Define $f^{-1}(H) = \{x \in G : \exists h \in H : f(x) = h\}$

(pré-imagem de H por f) $= \{x \in G : \exists h \in H : gxg^{-1} = h\}$



AF.01: $f^{-1}(H) \neq \emptyset$. De fato; temos que $e \in f^{-1}(H)$ pois:

$$f(e) = geg^{-1} = g \cdot g^{-1} = e \in H.$$

AF.02: $f^{-1}(H) < G$:

Dados $\alpha, \beta \in f^{-1}(H)$. A mostrar:

(N,S)

(i) $\alpha \cdot \beta \in f^{-1}(H)$;

(ii) $\alpha^{-1} \in f^{-1}(H)$.

De fato; como $\alpha, \beta \in f^{-1}(H)$, então $\exists\, h_1, h_2 \in H$ tais que $f(\alpha) = h_1$ e $f(\beta) = h_2$. Assim:

$$H \ni h_1 \cdot h_2 = f(\alpha) \cdot f(\beta) = (g\alpha g^{-1})(g\beta g^{-1})$$

$$= g\alpha(g^{-1}g)\beta g^{-1} = g(\alpha\beta)g^{-1}$$

$\Rightarrow \quad g(\alpha\beta)g^{-1} = h_1 h_2 \in H$;

$\Rightarrow \quad f(\alpha\beta) \in H \quad \Rightarrow \quad \alpha.\beta \in f^{-1}(H)$;

provando (i).

Além disso:

$$H \ni h_1^{-1} = \left(f(\alpha)\right)^{-1} = \left(g\alpha g^{-1}\right)^{-1} =$$

$$(g^{-1})^{-1}\alpha^{-1}g^{-1} = g\alpha^{-1}g^{-1} .$$

Logo;

$$\underbrace{g\alpha^{-1}g^{-1}}_{f(\alpha^{-1})} = h_1^{-1} \in H, \text{ ou seja:}$$

$$\Rightarrow \quad f(\alpha^{-1}) \in H \quad \Rightarrow \quad \alpha^{-1} \in f^{-1}(H).$$

Portanto, $f^{-1}(H) < G$.

□

04) T. de Lagrange: Seja G um grupo finito e $H < G$. Então, $|H| \mid |G|$.

(1,5) Ex.: $G = S_4$. Temos que $|G| = |S_4| = 6$.

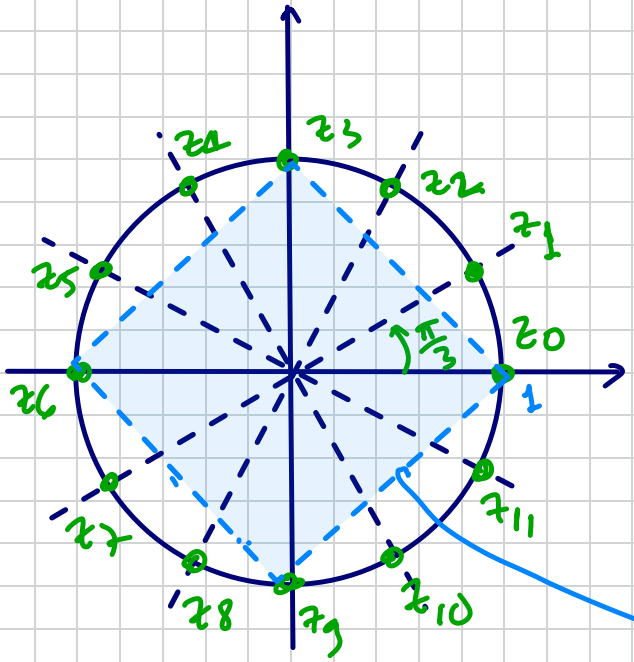
Temos $H = \{id, R_2\}$. Temos que $H < G$.

Além disso, $|H| = 2$; e temos realmente que $2 \mid 6$.

□

05) $G = \{ e^{i\frac{k\pi}{6}} : k = 0, 1, \dots, 11 \}$.

(a)



(1,0)

$z_0 = 1$

$z_1 = e^{\frac{2\pi i}{6}} = e^{\frac{\pi}{3}i}$

$\vdots$

$H = \{z_0, z_3, z_6, z_9\}$

$\Rightarrow H = \{1, e^{\frac{\pi}{2}i}, e^{\pi i}, e^{\frac{3\pi}{2}i}\}$

$= \{1, i, -1, -i\}$

$\Rightarrow H < G$.

(b) $H = \{1, i, -1, -i\}$

$\circ$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

1,0

Sim, pois $|H| = 4$, e então temos subgrupo com 2 elementos (T. Lagrange).

(c) $o(e^{i\pi}) = ?$

Note que $e^{i\pi} = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi = -1$.

1,0 é, como 1 é o neutro de G, temos que $(-1)^2 = 1$; e 2 é a menor potência tal que $(-1)^n = 1$. Logo:

$$o(e^{i\pi}) = 2$$

(d) $e^{i\frac{\pi}{3}} H = e^{i\frac{\pi}{3}} \{1, i, -1, -i\} =$

$$= \{e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{\pi}{3}}\cdot i, e^{i\frac{\pi}{3}}\cdot(-1), e^{i\frac{\pi}{3}}\cdot(-i)\}$$

1,0

$=$

$$= \{ e^{i\frac{\pi}{3}},\ e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}},\ e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{\pi i},\ e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{\frac{3\pi}{2}i} \} =$$

$$= \{ e^{i\frac{\pi}{3}},\ e^{i\frac{5\pi}{6}},\ e^{i\cdot\frac{4\pi}{3}},\ e^{i\cdot\frac{11\pi}{6}} \}.$$

(e) Sim, pois $G = \langle i \rangle = \langle e^{i\frac{\pi}{2}} \rangle$. (0,5)

(f) Porque sendo G cíclico segue que G é abeliano. (0,5)

(g) Não, pois $|G| = 12$ e $8 \nmid 12$ (pelo T. de Lagrange). (0,5)