Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Primeira Prova[1] de Álgebra A
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 08/10/2026

Questão 01. Considere a estrutura $(\mathbb{R}, *)$, onde $*$ é a operação

$$a * b = a + b - 2$$

Mostre que tal estrutura é um grupo. É abeliano?

Questão 02. Sejam H e K dois subgrupos de um grupo G.

(a) Mostre que $H \cap K < G$.

(b) Dê um exemplo para ilustrar que o resultado acima, em geral, é falso para a união, ou seja, em geral $H \cup K$ não é subgrupo de G.

Questão 03. Seja G um grupo e $H < G$. Defina $f : G \to G$ por $f(x) = gxg^{-1}$, onde $g \in G$ é uma constante fixada.

(a) Mostre que $f(H) < G$.

(b) Considere o conjunto $f^{-1}(H)$. Mostre que o mesmo está bem definido, i.e., que $f^{-1}(H) \neq \emptyset$. Em seguida, prove que $f^{-1}(H) < G$.

Questão 04. Enuncie o Teorema de Lagrange. Em seguida, apresente um exemplo ilustrativo de aplicação.

Questão 05. Seja $G = \{z \in \mathbb{C} : z^{12} = 1\}$ o grupo muitiplicativo das raízes décimas segundas da unidade[2]

(a) Faça uma representação geométrica no plano complexo das raízes décimas segundas de 1. Em seguida, destaque um subconjunto H de G que forme geometricamente um quadrado, onde um dos vértices seja o neutro multiplicativo. Conclua que $H < G$.

(b) Monte a tábua da multiplicação de H. O subgrupo H também contém subgrupos sem ser os triviais? Justifique, sem precisar encontrá-los.

(c) Qual a ordem do elemento $e^{i\pi}$?

(d) Determine a classe lateral à esquerda de H por $e^{i\frac{\pi}{3}}$, ou seja, a classe $e^{i\frac{\pi}{3}}H$.

(e) O grupo G é cíclico? Justifique.

(f) Afirmamos que $e^{i\frac{\pi}{3}}H = He^{i\frac{\pi}{3}}$. Por quê?

(g) G pode possuir algum subgrupo de ordem 8? Explique.

---

[1] Valores das questões: $1,5 + 2,0 + 2,5 + 1,5 + 5,5$

[2] A saber, as raízes décimas segundas complexas da unidade são da forma $z_k = \cos\frac{k\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{k\pi}{6} = e^{i\frac{k\pi}{6}}$, para $k = 0, 1, 2, ..., 11$. Em particular, para $k = 0$ temos $z_0 = 1$.