Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Álgebra A
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 04 - Subgrupos normais

1. Mostre que a intersecção de subgrupos normais é um subgrupo normal.

2. Sejam G e H dois grupos e o produto cartesiano: $G \times H = \{(a, b) : a \in G \text{ e } b \in H\}$ e a operação $\star$ induzida por

$$(a, b) \star (c, d) = (ac, bd).$$

   (a) Mostre que $G \times H$ é um grupo.

   (b) Mostre que $N = \{(a, e) : a \in G\} \lhd G \times H$.

3. Sejam G um grupo cíclico e $H \lhd G$. Mostre que G/H é cíclico.

4. Sejam G um grupo e $H < G$. Mostre que se o índice de H em G é 2, então $H \lhd G$.

5. Seja G um grupo e defina S por $S = \{xyx^{-1}y^{-1} : x, y \in G\}$. Mostre que $G' = \langle S \rangle$ é um subgrupo normal de G.

6. Seja G um grupo finito e $n \geq 2$. Suponha que $(xy)^n = x^n y^n$, $\forall x, y \in G$. Defina os conjuntos $G_n = \{x \in G : x^n = e\}$ e $G^n = \{y^n : y \in G\}$. Prove que G_n e G^n são subgrupos normais de G.

7. Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ defina $\tau_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\tau_{a,b}(x) = ax + b$. Considere $G = \{\tau_{a,b} : a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0\}$. Mostre que

   (a) G é um grupo com a composição de funções.

   (b) $N = \{\tau_{1,b} : b \in \mathbb{R}\} \lhd G$.

8. Seja T o grupo das matrizes triangulares superiores 2×2 inversíveis com entradas reais, i.e., matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

   onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $ac \neq 0$. Seja U o conjunto das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   onde $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Mostre que $U < T$.

   (b) Prove que U é abeliano.

   (c) Prove que $U \lhd T$.