

Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo 3
Lista 6 de Exercícios - Propriedades do gradiente. Planos tangentes.
Prof. Dr. Maurício Zahn

1. Determine o vetor gradiente de f no ponto P indicado:

(a) $f(x, y, z) = x^2 - 3yz + z^3$; $P(2, 1, 0)$. (b) $f(x, y, z) = 2\sqrt{xyz}$; $P(3, -4, -3)$.

2. Calcule a derivada direcional de f no ponto P , na direção do vetor $\vec{v}$ em cada caso:

(a) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$; $P(2, 1)$; $\vec{v} = (1, 1)$.

(b) $f(x, y, z) = \ln(1 + x^2 + y^2 - z^2)$; $P(1, -1, 1)$; $\vec{v} = (2, -2, 3)$.

(c) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$; $P(-3, 3)$; $\vec{v} = (3, 4)$.

3. Prove o seguinte teorema:

Teorema. *Sejam f, g funções de $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então*

(i) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$;

(ii) $\nabla(\alpha f) = \alpha \nabla f$;

(iii) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.

(iv) $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

4. Seja $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, e $r = \|\vec{r}\|$.

(a) Mostre que $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ e $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$. Conclua que $\nabla r = \frac{\vec{r}}{r}$.

(b) Mostre que $\nabla \ln r = \frac{\vec{r}}{r^2}$.

5. Admita que $T(x, y) = x^2 + 3y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy . Estando-se no ponto $(2, \frac{1}{2})$, qual a direção e sentido de maior crescimento da temperatura? Qual a taxa de crescimento nesta direção?

6. Encontre o plano tangente ao gráfico de $f(x, y) = xy^3 + x^2$ no ponto $P(2, -2)$.

7. Obtenha a equação do plano tangente ao gráfico de cada superfície a seguir, nos pontos indicados:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$, no ponto $P(6, 2, 3)$ [Resp.: $6x + 2y + 3z - 49 = 0$]

(b) $f(x, y) = 3xy^3 + x^3$ em $P(2, 1)$.

(c) $f(x, y) = e^{x \cos y}$ em $P(-1, \frac{\pi}{2})$. [Resp.: $y + z = 1 + \frac{\pi}{2}$]