

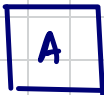
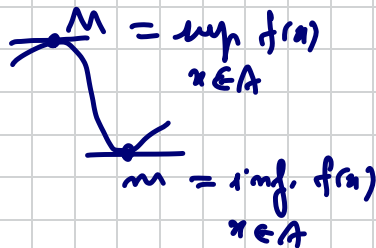
AULA DE EXERCÍCIOS

L1:1. Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco do $\mathbb{R}^m$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ integrável, e sejam

$$m = \inf\{f(x) : x \in A\} \text{ e } M = \sup\{f(x) : x \in A\}.$$

Mostre que

$$m \leq \frac{\int_A f(x) dx}{\text{Vol}(A)} \leq M.$$

 $f: A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ integrável.Note que, $\forall x \in A$, tem-se que

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Integrando sobre o bloco A , teremos:

$$\int_A m \, dx \leq \int_A f(x) \, dx \leq \int_A M \, dx$$

$$m \underbrace{\int_A dx}_{\text{Vol}(A)} \leq \int_A f(x) \, dx \leq M \cdot \underbrace{\int_A dx}_{\text{Vol}(A)}$$

$$\Rightarrow m \cdot \text{Vol}(A) \leq \int_A f(x) dx \leq M \cdot \text{Vol}(A).$$

Como $\text{Vol}(A) > 0$, dividindo por $\text{Vol}(A)$, vem:

$$m \leq \frac{\int_A f(x) dx}{\text{Vol}(A)} \leq M.$$

□

L1:

2. Adicionando a hipótese no exercício anterior de que f é contínua no bloco A , conclua que existe $c \in A$ tal que¹

$$\int_A f(x) dx = f(c) \cdot \text{Vol}A.$$

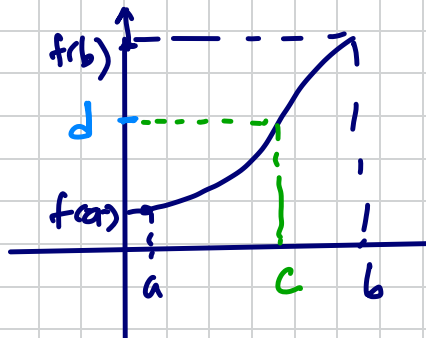
Recordando do TEOR. DO VALOR INTERMEDIÁRIO (T.V.I.):

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e

$$f(a) < d < f(b).$$

Então, $\exists c \in [a, b]$

tal que $f(c) = d$.



Deo exercício anterior, temos que

$$\inf_{x \in A} f(x) = m \leq \underbrace{\frac{\int_A f(x) dx}{\text{Vol}(A)}} \leq M = \sup_{x \in A} f(x)$$

Como f é integrável, segue que f é contínua.

Então, pelo T.V.F. ; segue que $\exists c \in A$

$$\text{tal que } f(c) = \frac{\int_A f(x) dx}{\text{Vol}(A)} ; \text{ ou seja;}$$

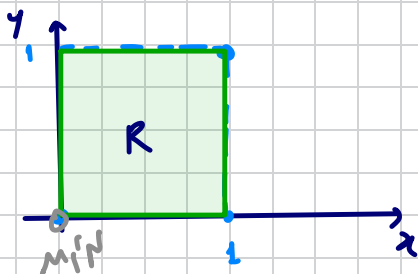
$$\int_A f(x) dx = f(c) \cdot \text{Vol}(A)$$

□

L1:

3. Encontre um intervalo fechado que contenha o valor da integral dupla dada em cada caso
(Obs.: use o exercício 1).

(a) $\int_R \int (x^2 + y^2) dA$, onde R é a região retangular com vértices em $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$.



Deo exercício 01;
temos que:

$$m \leq \frac{\iint_R f(x,y) dA}{\text{Vol}(A)} \leq M \quad (*)$$

No more case ; $f(x, y) = x^2 + y^2$;

$$\text{Vol}(A) = a_{\text{ree}} = 1.1 \approx 1$$

$$\bullet \quad \underbrace{m = \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}} f(x,y)}_{\substack{\text{min.} \\ = (0,0)}} = \min_{(x,y) \in \mathbb{R}} (x^2 + y^2) = 0^2 + 0^2 = \underbrace{0}$$

- $M = \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}} f(x,y) = \max_{(x,y) \in \mathbb{R}} (x^2 + y^2) = 1^2 + 1^2 = 2$

Dino; (*) files:

$$0 \leq \frac{\iint_R (x^2 + y^2) dA}{1} \leq 2$$

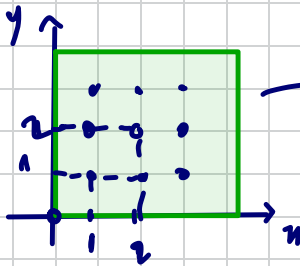
$$\Rightarrow 0 \leq \iint_R (x^2 + y^2) dA \leq 2$$

L1 :

4. Sem efetuar cálculo algum, explique por quê a função $f : A = [0, 100] \times [0, 100] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

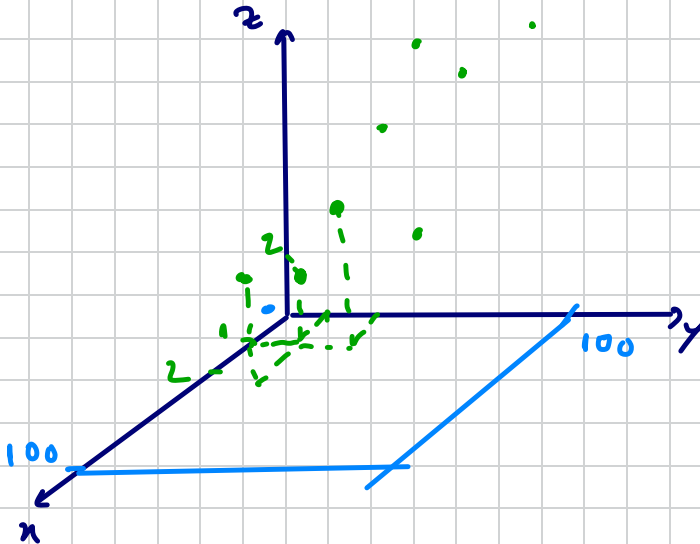
$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{se } (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é integrável no bloco A . E qual seria o valor? Se substituirmos o bloco A por todo o $\mathbb{R}^2$, as conclusões acima mudariam? Justifique.



→ apenas nos pontos da
forma (a, b) ; $a, b \in \mathbb{N}$
 $(1, 1)$; $(1, 2)$; $(2, 1)$; $(2, 2)$;
 $(2, 3)$; $(1, 3)$, ... etc...

que f assume valor $a^2 + b^2 > 0$
($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$)



Note que o conj.

$X = \{(a,b): a,b \in \mathbb{N}\}$, no plano tem medida nula. (conj. de pontos tem medida nula no plano)

Então, $A \setminus X$ é $\mathbb{J}$ -mensurável.

Então, f é integrável; e como

$f(x,y) = 0$ em A , exceto em um conj. de medida nula, segue que

$$\iint_A f = 0.$$

Se pensarmos em todo o $\mathbb{R}^2$, ainda temos

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f = 0, \text{ pois, embora}$$

o conj. $X = \{(a,b): a,b \in \mathbb{N}\}$ tenha infinitos pontos, ainda é um conj. discreto

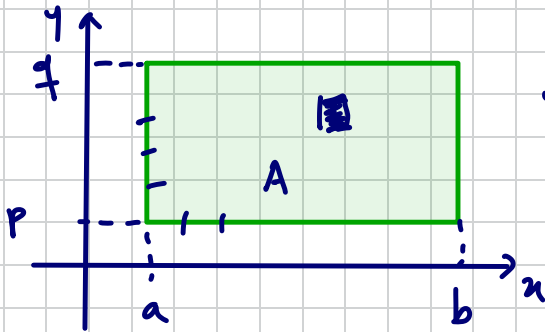
de pontos do $\mathbb{R}^2$, tendo, portanto, medida nula em $\mathbb{R}^2$.



L1:

5. Usando uma partição regular, através da definição de integral múltipla, mostre que, sendo A um retângulo do $\mathbb{R}^2$, com lados paralelos aos eixos coordenados, então

$$\int_A 1 \, dx \, dy = \text{área do retângulo}.$$

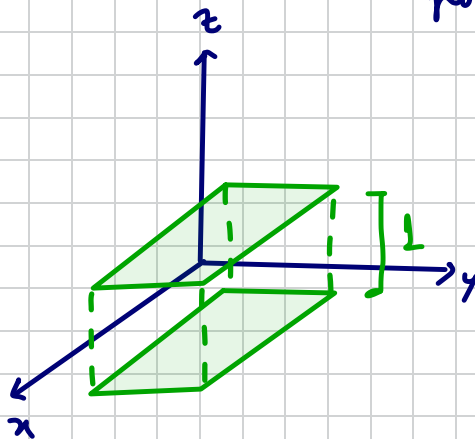


Seja $A = [a, b] \times [p, q]$

e considere

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ dada

por $f(x, y) = 1$.



Seja $P = P_1 \times P_2$; onde P_2 divide $[a, b]$

em m subintervalos de comprimento

$$\Delta x = \frac{b-a}{m} :$$

$$P_1 = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_m = b\}$$

Assim: $t_i = a + i \cdot \frac{(b-a)}{m}$.

$$t_0 = a + 0 \cdot \frac{(b-a)}{m} = a$$

$$t_1 = a + 1 \cdot \frac{(b-a)}{m}$$

$\vdots$

$$b = t_m = a + \cancel{m} \cdot \frac{(b-a)}{\cancel{m}} = \cancel{a} + b - \cancel{a} = b$$



$$2, P_2 = \{p = s_0 < s_1 < \dots < s_m = q\} \text{ divide o}$$

intervalo $[p, q]$ em m subintervalos de comprimento :

$$\Delta y = \frac{q-p}{n} ; \text{ onde}$$

$$y_j = p + j \cdot \frac{(q-p)}{n}.$$

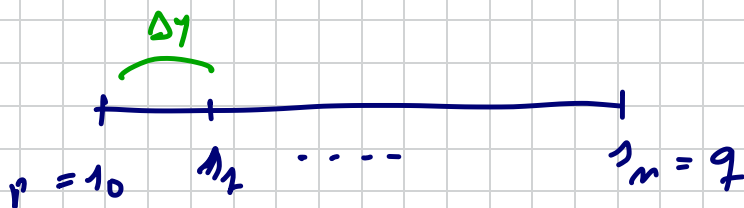
Seu exemplo:

$$y_0 = p + 0 \cdot \frac{(q-p)}{n} = p$$

$$y_1 = p + 1 \cdot \frac{(q-p)}{n}$$

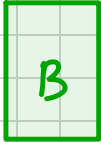
$\vdots$

$$y_n = p + n \cdot \frac{(q-p)}{n} = p + q - p = q.$$



Note que, como $f(x, y) = 1$, $\forall (x, y) \in A$;
então, para qualquer subbloco B da
partição feita, temos

$$m_i = \inf_{(x,y) \in B} f(x,y) = L = M_i = \sup_{(x,y) \in B} f(x,y)$$

Δy  Δx $\rightarrow$ subbloco B da partição P

o volume de cada subbloco será:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B) &= \text{área} = \Delta x \Delta y = \\ &= \frac{(b-a)}{m} \cdot \frac{(q-p)}{n} \end{aligned}$$

Montando a soma superior:

$$S(f; P) = \sum_{B \in P} \underbrace{M_i}_{=1} \cdot \text{Vol}(B) =$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n 1 \cdot \frac{(b-a)}{m} \cdot \frac{(q-p)}{n} =$$

$$= \frac{b-a}{m} \cdot \frac{q-p}{n} \cdot \sum_{i=1}^m \left(\underbrace{\sum_{j=1}^n 1}_n \right) =$$

$$= \frac{b-a}{m} \cdot \frac{q-p}{n} \cdot \sum_{i=1}^m m =$$

$$= \frac{b-a}{m} \cdot \frac{q-p}{n} \cdot \underbrace{m \sum_{i=1}^m 1}_m =$$

$$= \frac{b-a}{m} \cdot (q-p) \cdot m = (b-a) \cdot (q-p)$$

$$\Rightarrow S(f; P) = (b-a) \cdot (q-p)$$

Tomando o limite com $m, n \rightarrow \infty$ (i.e., efetuando um refinamento da partição, vamos encontrar:

$$\int_A f = \lim_{m, n \rightarrow \infty} S(f; P) =$$

$$= \lim_{m, n \rightarrow \infty} (b-a) \cdot (q-p) = \underbrace{(b-a) \cdot (q-p)}_{\text{área do retângulo.}}$$

Do mesmo modo, tem-se que

$$\int_A f = (b-a) \cdot (q-p)$$

Logo, f é integrável, e

$$\int_A f = (b-a) \cdot (q-p) = \text{área do retângulo.}$$

□

