28/10/26 – AULA 29

Encerramos a aula passada definindo a função característica de um conjunto. Lembrando:

Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco e tome $X \subset A$. Definimos:

$$\xi_X : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \quad \text{por:}$$

$$\xi_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in X \\ 0, & \text{se } x \in A \setminus X. \end{cases}$$

Vimos que ξ_X não é contínua no ∂X.

Def.: Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ é mensurável segundo Jordan, ou J – mensurável se, e somente se, a função característica $\xi_X : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ for integrável.

Neste caso, o volume do conjunto X é dado por:

$$\text{Vol}(X) = \int_{\mathbb{R}^m} \xi_X .$$

De fato:

$$\int_{\mathbb{R}} \xi_X = \int_X \underbrace{\xi_X(x)}_{=1,\ \text{pois } x \in X} \cdot dx + \int_{\mathbb{R}^m \setminus X} \underbrace{\xi_X(x)}_{=0,\ \text{pois } x \notin X} dx =$$

$$= \int_X 1\,dx + 0 = \int_X 1 \cdot dx = \mathrm{Vol}(X).$$

Ex.: Em $\mathbb{R}$: $X = [a,b]$.

$$\int_{\mathbb{R}} \xi_X(x)\,dx = \int_{[a,b]} \overbrace{\xi_X(x)}^{1}\,dx + \int_{\mathbb{R}\setminus[a,b]} \overbrace{\xi_X(x)}^{0}\,dx$$

$$= \int_{[a,b]} 1\,dx = \int_a^b dx = b-a = \text{comp. do intervalo } [a,b]$$

$$\| \quad \mathrm{Vol}(X)$$

PROPOSIÇÃO: Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ é J-mensurável se, e somente se, $\mathrm{med}(\partial X) = 0$.

DEMONSTR.: Basta observar que:

$X \subset \mathbb{R}^m$ é J-mensurável $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $\xi_X : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ for integrável

$\Updownarrow$ T. Lebesgue

D_{ξ_X} dos pontos de descontinuidade de ξ_X tiver medida nula, ou

seja, x_0, e não x_0,

$$med(D_{\xi_X}) = 0$$

FATO IMPORTANTE $\Updownarrow$

$$med(\partial X) = 0.$$

$\square$

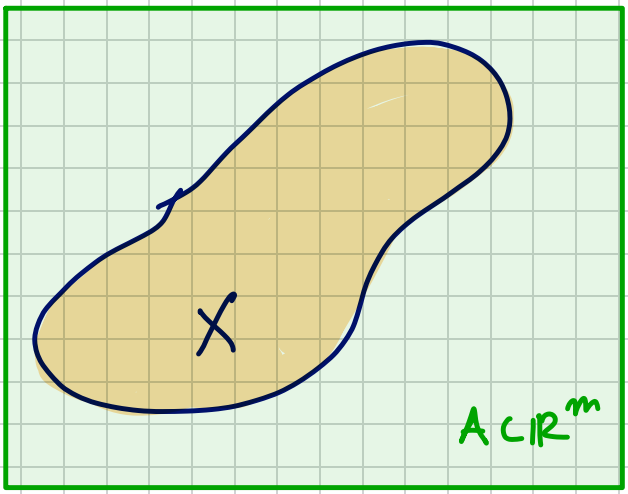
INTEGRAIS EM CONJUNTOS MAIS GERAIS.

Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto J-mensurável, e limitado.

Tome $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco tal que $A \supset X$.

Seja $f: X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Queremos calcular

$$\int_X f.$$



Defina $\tilde{f}$ a extensão de f em $A \subset \mathbb{R}^m$ dada por

$$\tilde{f}(x) = f(x) \cdot \xi_X(x) =$$

$$= \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in X \\ 0, & \text{se } x \in A \setminus X. \end{cases}$$

Disso, temos:

$$\int_A \tilde{f}(x)\,dx = \int_A f(x)\cdot \xi_X(x)\,dx =$$

$$= \int_X f(x)\cdot \underbrace{\xi_X(x)}_{=1}\,dx + \int_{A\setminus X} f(x)\cdot \underbrace{\xi_X(x)}_{=0}\,dx$$

$$= \int_X f(x)\,dx + 0 = \int_X f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_A \tilde{f} = \int_X f .$$

Ou seja, para calcular $\int_X f$, com X limitado e J-mensurável, basta tomar um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$ tal que $X \subset A$ e calcular $\int_A \tilde{f}$, extensão natural de f ao bloco A.

PROPOSIÇÃO: (PROPRIEDADES DA INTEGRAL MÚLTIPLA)

Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funções integráveis em um conjunto J-mensurável X. Então, valem as propriedades:

(01) $f+g$ é integrável, e

$$\int_X f+g = \int_X f + \int_X g$$

(02) $\forall\, c \in \mathbb{R}$, $c \cdot f$ é integrável, e

$$\int_X c \cdot f = c \cdot \int_X f.$$

(03) Se $f \geq 0$, então $\int_X f \geq 0$. Além disso,

se $f \geq g$, então $\int_X f \geq \int_X g$.

(04) $\left| \int_X f \right| \leq \int_X |f|$.

(05) Se $X = A \dot{\cup} B$ (união disjunta), então

$$\int_X f = \int_A f + \int_B f.$$

INTEGRAL DE RIEMANN:

Seja $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ um conjunto limitado e J-mensurável (logo, f é integrável). Seja

$D = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ uma <u>decomposição</u>

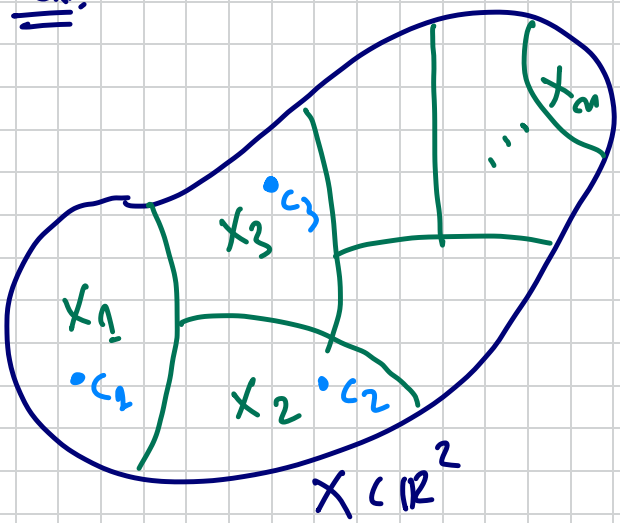
do conjunto X, ou seja,

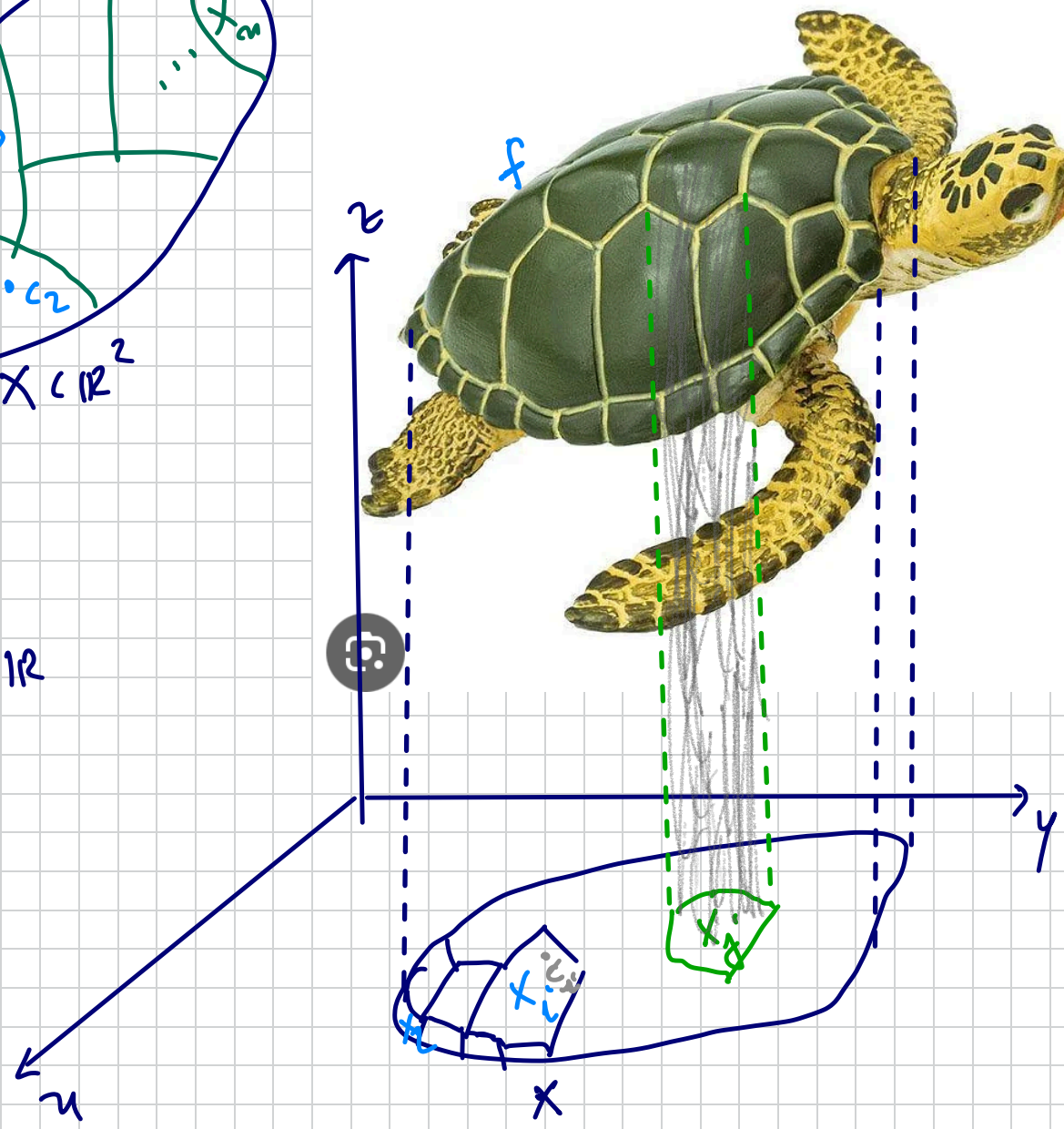
$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$, e tais que

$$\text{int}(X_i) \cap \text{int}(X_j) = \emptyset \quad , \text{se } i \neq j.$$

(um exemplo visual: corte uma batata em n pedaços de qualquer modo. Cada pedaço será um conj. X_i, formando uma decomposição da batata).

Ex.:





$f: X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f \geq 0$

O volume abaixo do gráfico de f (curva) será dado de que modo?

Tome um ponto c_i qualquer em cada X_i.

Então, temos que, $\forall i \in \{1, 2 \dots, n\}$, temos que

$$m_i \leq f(c_i) \leq M_i.$$



Assim, multiplicando pelo volume de cada X_i correspondente, teremos:

$$m_i \cdot \text{Vol}(X_i) \leq f(c_i)\,\text{Vol}(X_i) \leq M_i \cdot \text{Vol}(X_i)$$

Somando sobre todos os i's, obtemos:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \text{Vol}(X_i)}_{s(f;D)} \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \text{Vol}(X_i) \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \text{Vol}(X_i)}_{S(f;D)}$$

Tomando o limite com $n \to \infty$, obtemos:

$$\int_X f = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \text{Vol}(X_i),$$

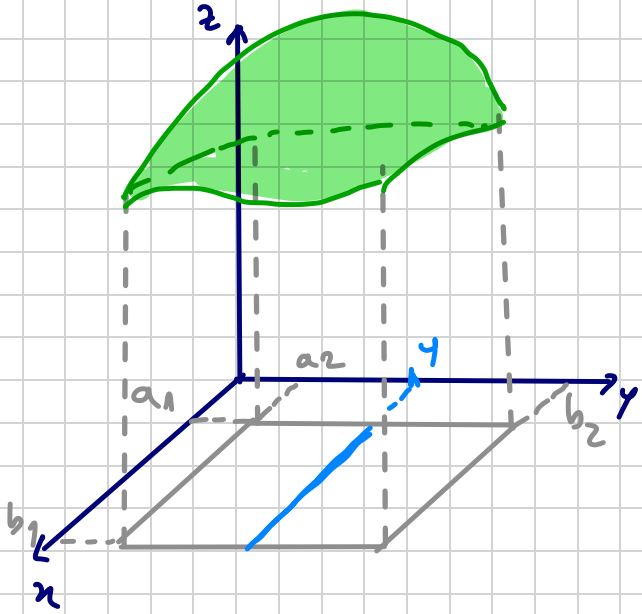
chamada de integral de Riemann de f sobre o conjunto X.

INTEGRAIS DUPLAS:

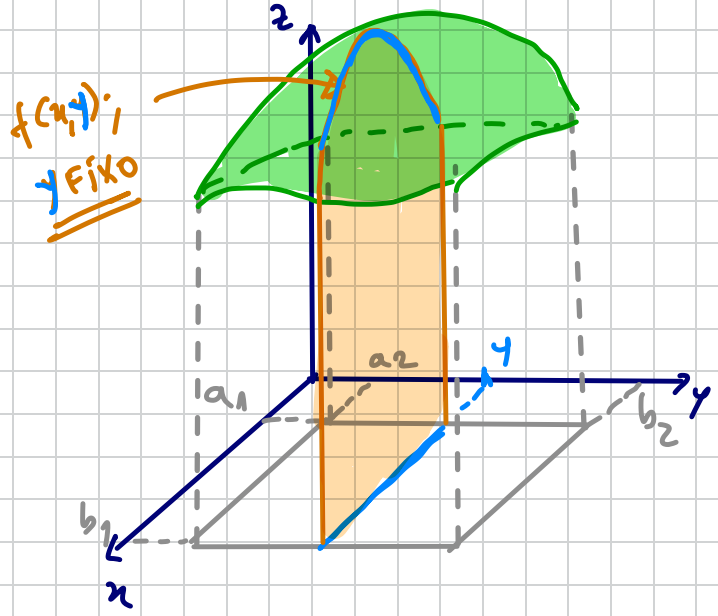
No que segue, vamos descrever uma forma prática de calcular integrais duplas. Dada $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Ω - J-mensurável, são dois casos a considerar:

CASO 1: Ω é um retângulo de $\mathbb{R}^2$.

Seja $f: [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$



Fixe $y \in [a_2, b_2]$, e considere a "lâmina" formada pelo plano paralelo ao plano xz, passando por y destacado. (a lâmina abaixo do gráfico de f)

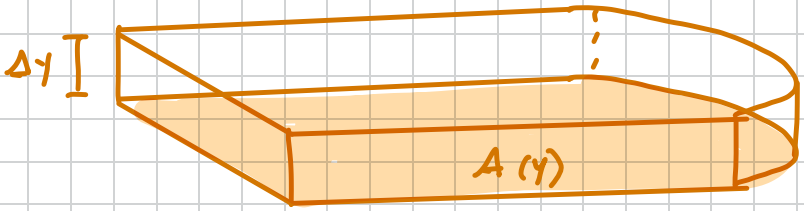


A área destacada abaixo do gráfico de f, formando a lâmina é dada por:

$$A(y) = \int_{x=a_1}^{x=b_1} f(x,y)\,dx$$

Seja $P = \{a_2 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$ uma partição de $[a_2, b_2]$. Então, formamos com esta

partição fatia de base $A(y)$ e altura $\Delta y_i = t_i - t_{i-1}$



O volume dessa fatia será dado por:

$$V_i = A(y) \cdot \Delta y_i .$$

Assim, somando sob todos os i's, vemos obter uma aproximação do volume V abaixo do gráfico:

$$\tilde{V} = \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} A(y) \cdot \Delta y_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{x=a_1}^{x=b_1} f(x,y)\, dx \right) \Delta y \quad , \text{ uma}$$

soma de Riemann.

Passando o limite com $n \to \infty$, vemos encontrar o volume V, ou seja:

$$V = \lim_{n \to \infty} \tilde{V} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{x=a_1}^{x=b_1} f(x,y)\, dx \right) \Delta y =$$

$$= \int_{y=a_2}^{y=b_2} \int_{x=a_1}^{x=b_1} f(x,y)\, dx\, dy \quad ,$$

uma integral dupla feita de forma <u>iterada</u>.

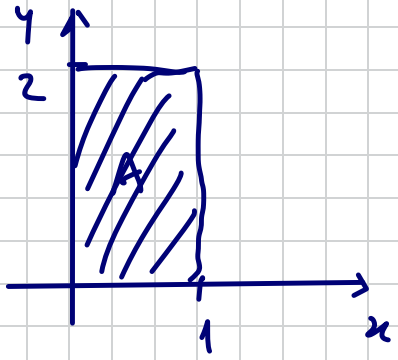
Obs.: Poderíamos calcular

$$V = \int_{x=a_1}^{x=b_1} \int_{y=a_2}^{y=b_2} f(x,y)\,dy\,dx$$

Ex.: $\iint_A (3x+4y)\,dx\,dy$; onde $A = [0,1] \times [0,2]$.

Este foi um exemplo feito por def. na aula 27, resultando em 11, que foi bem trabalhoso.

Vamos calcular de forma iterada:



$$\iint_A (3x+4y)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{y=2} \int_{x=0}^{x=1} (3x+4y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=2} \left(\frac{3x^2}{2} + 4xy \right)\Big|_{x=0}^{x=1} dy = \int_{y=0}^{y=2} \left(\frac{3(1)^2}{2} + 4 \cdot 1 \cdot y - 0 \right) dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=2} \left(\frac{3}{2} + 4y \right) dy = \left(\frac{3}{2} y + 2y^2 \right)\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 2 + 2 \cdot (2)^2 - 0 = 11.$$
