CÁLCULO 3

26/10/26 - AULA 28

Na aula passada estudamos os conceitos de integral inferior e superior de uma função $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, onde A é um bloco de $\mathbb{R}^m$.

Depois, estudamos o conceito de função integrável em um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$.

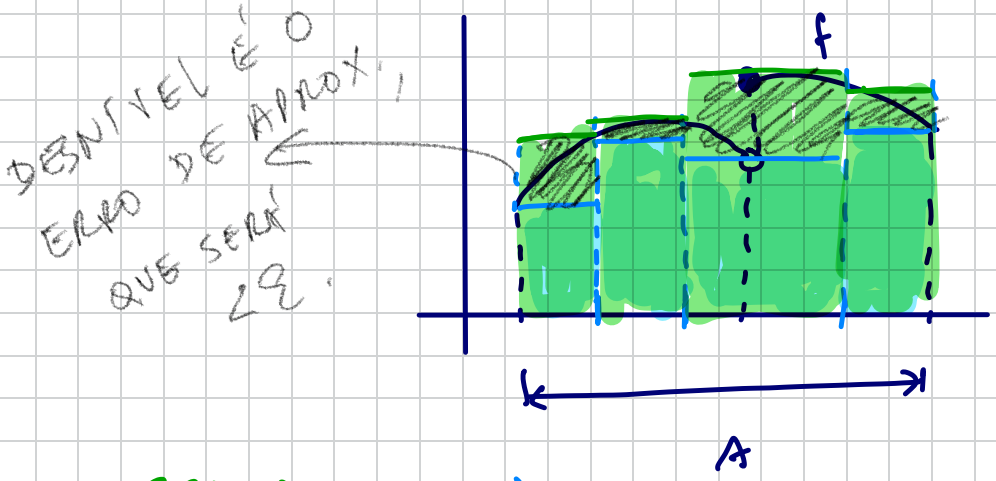
Vimos que

$f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é integrável no bloco $A \subset \mathbb{R}^m$

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists P$ partição do bloco A tal que

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon.$$



$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$ FIXADO, VAI EXISTIR UMA PARTIÇÃO DO BLOCO A TAL QUE A DIFERENÇA ENTRE AS SOMAS SUPERIOR E INFERIOR SERÁ MENOR DO QUE O ERRO $\varepsilon > 0$ DADO.

PROPOSIÇÃO: Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funções integráveis em um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$. Então, valem as seguintes propriedades:

01) $f+g$ é integrável, e

$$\int_A f+g = \int_A f + \int_A g.$$

02) Dado $c \in \mathbb{R}$, $c \cdot f$ é integrável, e

$$\int_A c \cdot f = c \cdot \int_A f.$$

03) Se $f \geq 0$, então $\int_A f \geq 0$. Além disso,

se $f \geq g$, então $\int_A f \geq \int_A g$.

04) $\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|$

05) Se $A = X \dot{\cup} Y$ (união disjunta), então

$$\int_A f = \int_X f + \int_Y f.$$

DEMONSTRAÇÃO: Iremos a 03:

$$f \geq 0 \Rightarrow \int_A f \geq 0 .$$

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ integrável no bloco A do $\mathbb{R}^m$.

Como, $\forall x \in A$, $f(x) \geq 0$; dada P uma partição, qualquer do bloco $A \subset \mathbb{R}^m$, então,

$$S(f;P) = \sum_{B \in P} M_i \cdot \text{Vol}(B) = \sum_{B \in P} \underbrace{\sup_{x \in B} f(x)}_{\geq 0 \text{ (pois } f \geq 0)} \cdot \underbrace{\text{Vol}(B)}_{> 0}$$

$$\Rightarrow S(f;P) \geq 0, \quad \forall P \text{ partição do bloco } A.$$

Fazendo o refinamento, e passando o limite, teremos:

$$\overline{\int_A} f = \inf \{ S(f;P) \} \geq 0$$

P é partição de A.

$$\Rightarrow \overline{\int_A} f \geq 0 .$$

Como, por hipótese f é integrável, então:

$$\int_A f = \overline{\int_A} f \geq 0 \Rightarrow \int_A f \geq 0 .$$

Além disso, mostremos que, se $f \geq g$, então,

$$\int_A f \geq \int_A g.$$

Suponha $f \geq g$, $\forall x \in A$. Defina $h: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ por $h(x) = f(x) - g(x)$.

Então, como $f(x) \geq g(x)$, segue que

$$h(x) = f(x) - g(x) \geq 0.$$

Logo, pelo provado acima segue que

$$\int_A h \geq 0, \text{ ou seja,}$$

$$\int_A f - g \geq 0.$$

Pelo item 01):

$$0 \leq \int_A f - g = \int_A f + (-g) = \int_A f + \int_A -g = \uparrow (02)$$

$$= \int_A f - \int_A g$$

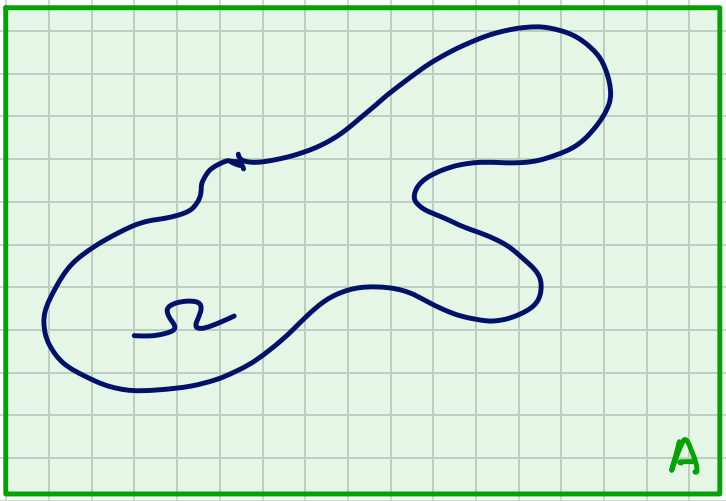
$$\Rightarrow \int_A f - \int_A g \geq 0 \Rightarrow \int_A f \geq \int_A g.$$

□

INTEGRAIS EM CONJUNTOS MAIS GERAIS.

No que segue, vamos apresentar conceitos e resultados que nos levarão ao estudo de integrais $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ é um conjunto mais geral do que um simples bloco de $\mathbb{R}^m$.

Ex.:



$A \subset \mathbb{R}^2$ um bloco.

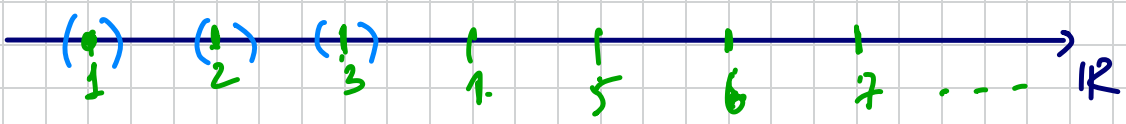
$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conj. mais geral.

Def.: Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ possui medida nula em $\mathbb{R}^m$ se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$ existir uma sequência de abertos $(C_n) \subset \mathbb{R}^m$ tal que

$$\Omega \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \text{Vol}(C_n) < \varepsilon.$$

Neste caso, escrevemos $\text{med}(\Omega) = 0$.

Ex.: Em $\mathbb{R}$. O conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ dos números naturais possui medida nula em $\mathbb{R}$.



AF: $\text{med}(\mathbb{N}) = 0$.

De fato, dado $0 < \varepsilon < 1$; considere os abertos:

$$C_n = \underset{\frac{\varepsilon}{2^{n+2}}}{B(n)} = \left(n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}},\ n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \right)$$

Logo, por construção

$$\mathbb{N} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n .$$

Além disso; $\text{Vol}\, C_n$ = comprimento de cada C_n. (em $\mathbb{R}$)

$$\text{Vol}\, C_n = \cancel{n} + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} - \left(\cancel{n} - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right) = \frac{2\varepsilon}{2^{n+2}} = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

Disso, segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Vol}\,(C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n =$$

$\longrightarrow$ série geométrica

$$= \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a} \qquad 0 < a < 1$$

Ou seja, $(C_n) \subset \mathbb{R}$ é tal que:

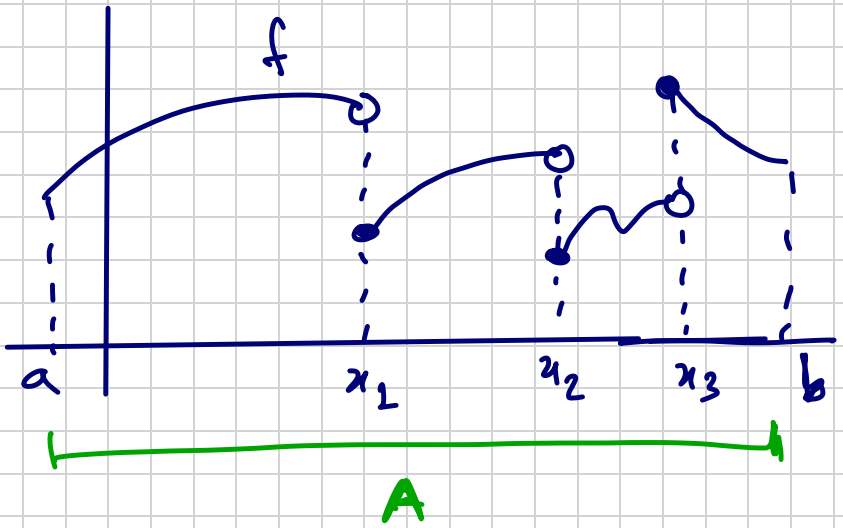
$$\mathbb{N} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \quad \text{e} \quad \sum_{n \geq 1} vol(C_n) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Logo, $med(\mathbb{N}) = 0$ (em $\mathbb{R}$)

TEOREMA DE LEBESGUE: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada em um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$. Então, f é integrável em A se, e somente se, o conjunto D_f dos pontos de descontinuidade de f tiver medida nula.

A demonstração desse teorema foge de um curso de cálculo. Vamos apresentar exemplos:

Ex.: $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Visualmente temos que f é integrável; ou seja, $\exists \int_A f = \int_a^{x_1} f + \int_{x_1}^{x_2} f + \int_{x_2}^{x_3} f + \int_{x_3}^{b} f$

É isto porque o conjunto de pontos de descontinuidade de f é dado por

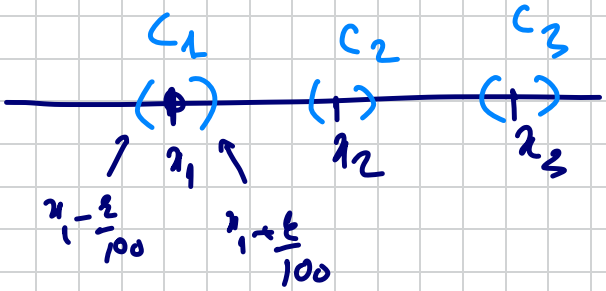
$$D_f = \{ x_1, x_2, x_3 \} \text{ ; e é tal que}$$

med $D_f = 0$. De facto, dado $0 < \varepsilon < 1$;

tome $C_1 = \overline{B\left(x_1, \frac{\varepsilon}{100}\right)}$; $C_2 = \overline{B\left(x_2, \frac{\varepsilon}{100}\right)}$; $C_3 = \overline{B\left(x_3, \frac{\varepsilon}{100}\right)}$

Então

$$D_f = \{ x_1, x_1, x_3 \} \subset C_2 \cup C_2 \cup C_3$$



; com

$\text{Vol } C_1 = \text{Vol } C_2 = \text{Vol } C_3 =$ comprimento do intervalo C_i.

$$\text{Vol } C_1 = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{100} = \frac{\varepsilon}{50}$$

Disso:

$$\sum_{i=1}^{3} \text{Vol } C_i = 3 \cdot \frac{\varepsilon}{50} < \varepsilon.$$

Logo, $\text{med } D_f = 0$. Disso, f é integrável.

---

02) A função de Dirichlet da aula passada:

$$f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ se } x, y \in \mathbb{R} \\ 0, \text{ se } x \notin \mathbb{Q} \text{ ou se } y \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Vimos que f não é integrável.
E isso também se comprova pelo T. de Lebesgue, pois:

$D_f = [0,1] \times [0,1]$ (ou seja a função de Dirichlet não é cont. em nenhum ponto).

Então, $\text{med } D_f =$ área de $[0,1] \times [0,1] = 1 \neq 0$.

Logo, pela negação do T. de Lebesgue, segue que f não é integrável.

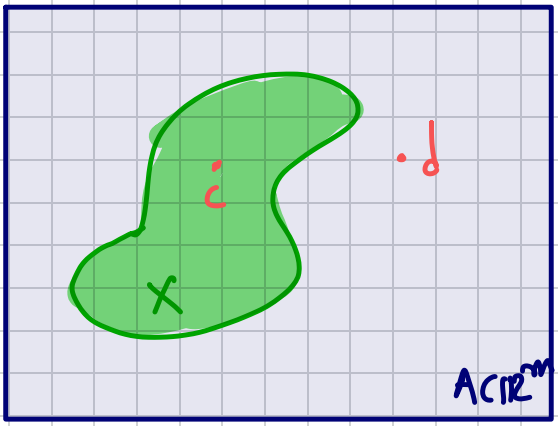
FUNÇÃO CARACTERÍSTICA:

Def.: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada em um bloco A de $\mathbb{R}^m$. Dado $X \subset A$ um subconjunto qualquer em A, definimos a função característica de f em X por:

$$\xi_X : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \quad ;$$

$$\xi_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in X \\ 0, & \text{se } x \in A \setminus X. \end{cases}$$

Ou seja, a função característica é uma função que indica se um dado ponto está ou não em um conjunto.



$$\xi_X(c) = 1 \quad ;$$

$$\xi_X(d) = 0$$

FATO IMPORTANTE: Os pontos de descontinuidade da função ξ_X ocorrem na fronteira do conjunto X (pois é onde ela "salta" de zero para um).

$$D_{\xi_X} = \partial X$$

