23/10/26 – AULA 27

Na aula passada estudamos somas inferior e superior de uma função $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ limitada em um bloco A de $\mathbb{R}^m$.

Sendo P uma partição do bloco $A \subset \mathbb{R}^m$, então

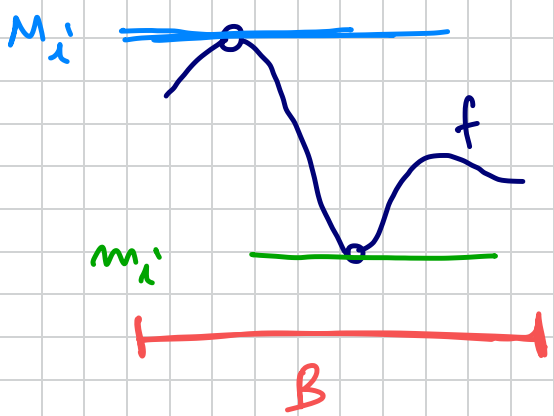
$$s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \text{Vol}(B) \quad \text{e}$$

$$S(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \text{Vol}(B) \quad ;$$

onde B são subblocos da partição P, tal que

$$\sum_{B \in P} \text{Vol}(B) = \text{Vol}(A) \quad ;$$

$$m_i = \inf_{x \in B} f(x) \quad \text{e} \quad M_i = \sup_{x \in B} f(x)$$



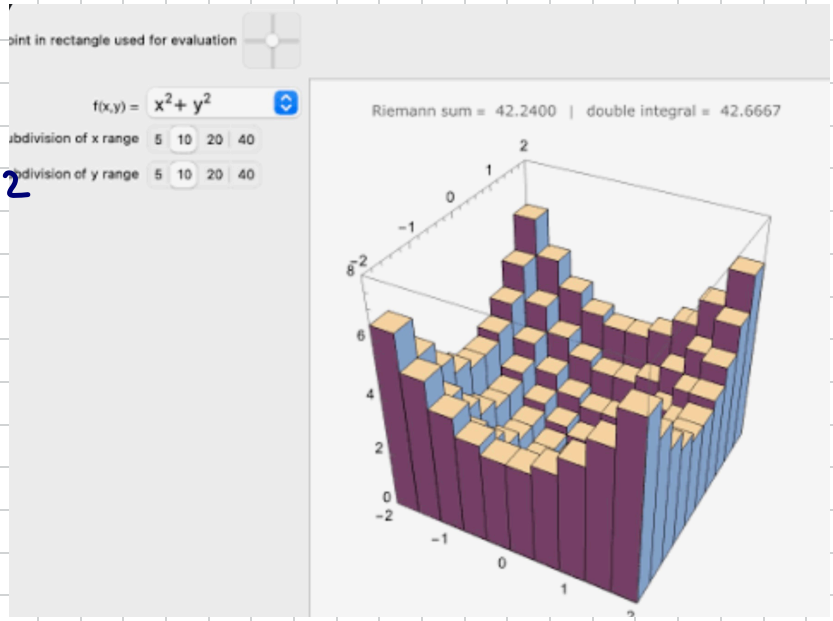
EX.: Se $f \geq 0$ em A, então, $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; então,

$s(f;P)$ fornece uma aproximação por falta do volume abaixo do gráfico de f em A, e $S(f;P)$ fornece uma aproximação por excesso do volume abaixo do

gráfico de f no bloco $A \subset \mathbb{R}^2$.

Ex.: ao lado, temos a representação de uma soma inferior de $f(x,y) = x^2 + y^2$ no bloco $A = [-2,2] \times [-2,2]$

$s(f; P)$; onde P é uma partição regular.



LEMA 03: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada em um bloco A de $\mathbb{R}^m$. Então, para quaisquer partições P e Q de A, tem-se que

$$s(f; P) \leq S(f; Q),$$

ou seja, qualquer soma inferior é sempre menor ou igual a qualquer soma superior.

DEMONSTR.: Basta considerar $\tilde{Q} = P + Q$ um refinamento tanto para P quanto para Q. Assim, pelo LEMA 2, da aula passada,

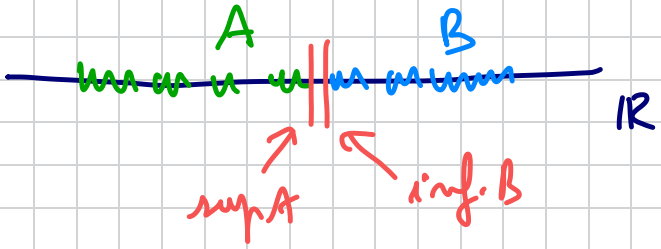
$$s(f; P) \leq s(f; P+Q) \leq S(f; P+Q) \leq S(f; Q)$$

□

INTEGRAIS INFERIOR E SUPERIOR:

De uma um resultado da Análise, temos:

TEOREMA: Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ não vazios tais que, $\forall x \in A, \forall y \in B$, $x \leq y$.



Então, $\sup A \leq \inf. B$.

Além disso,

$$\sup A = \inf. B \iff \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \exists y \in B \text{ tais } y - x < \varepsilon.$$

No nosso caso de interesse, sendo $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função limitada no bloco A, considere os seguintes conjuntos:

$$M = \{ s(f; P) : P \text{ é partição do bloco } A \} \subset \mathbb{R}$$

$$N = \{ S(f; P) : P \text{ é partição do bloco } A \} \subset \mathbb{R}.$$

Então, $\forall x \in M, \forall y \in N$, temos $x \leq y$, pois pelo lema anterior.

$$s(f; P) \leq S(f; Q)$$

Então, $\sup M \leq \inf. N$.

Vista motiva o seguinte conceito:

Def.: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada no bloco A de $\mathbb{R}^m$. Definimos as integrais inferior e superior de f no bloco A, respectivamente, por:

$$\underline{\int_A} f = \sup M = \sup_{\substack{P \text{ partição} \\ \text{de } A}} s(f; P)$$

$$\overline{\int_A} f = \inf N = \inf_{\substack{P \text{ é partição} \\ \text{de } A}} S(f; P)$$

Pelo acima descrito, segue que

$$\underline{\int_A} f = \sup M \leq \inf N = \overline{\int_A} f.$$

$$\Rightarrow \underline{\int_A} f \leq \overline{\int_A} f.$$

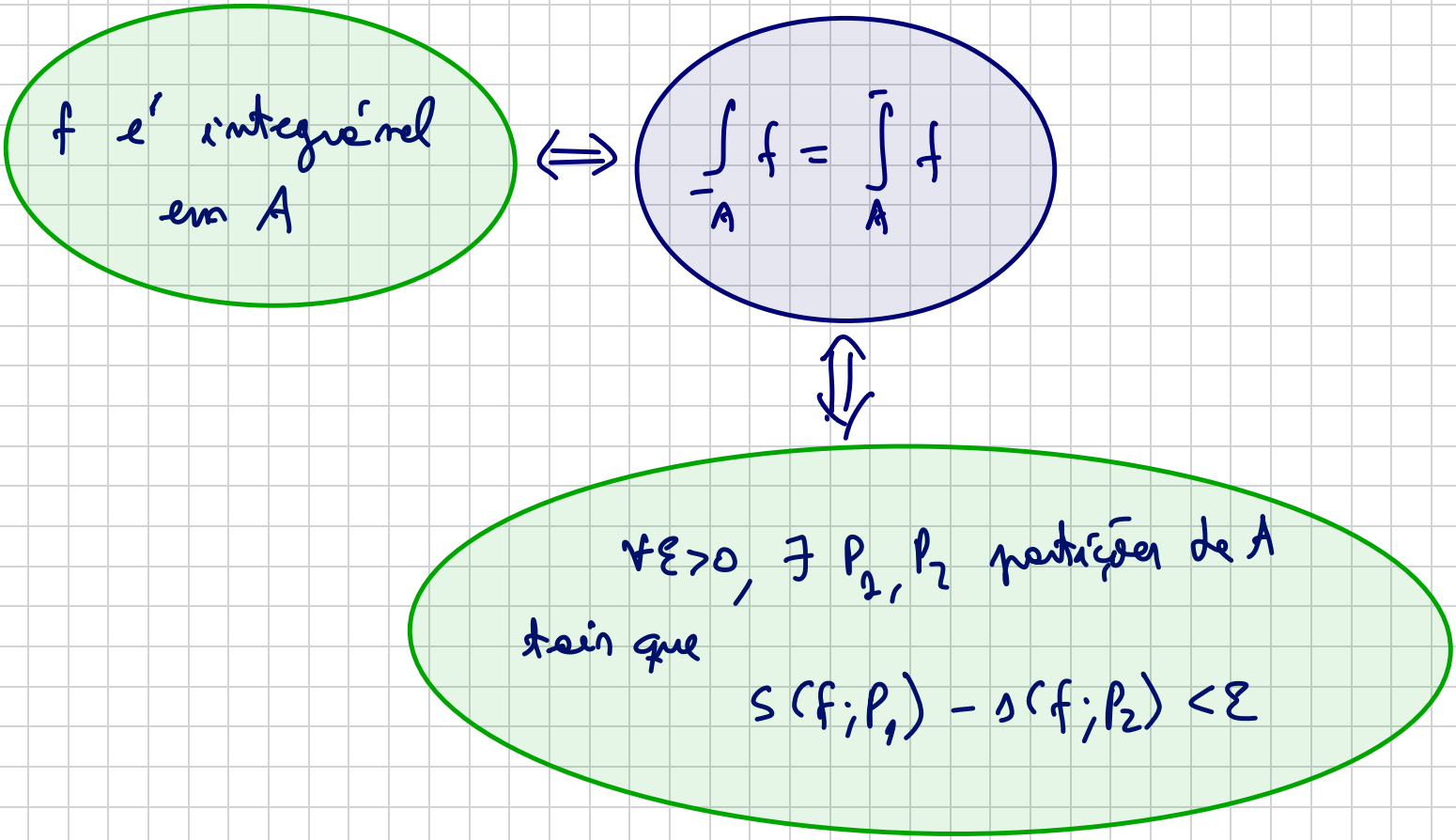
Def.: Dizemos que $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é <u>integrável</u> no bloco A se

$$\underline{\int_A} f = \overline{\int_A} f.$$

Este valor comum chama-se integral de f em A, e escrevemos

$$\int_A f.$$

Ainda, temos que:



Ou seja, estabelecemos o seguinte conceito:

Def.: Dizemos que $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é integrável no bloco $A \subset \mathbb{R}^m$ se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P_1, P_2$ partições de A tais que

$$S(f; P_1) - s(f; P_2) < \varepsilon.$$

Tomando P um refinamento para P_1 e P_2 temos o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO: $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é integrável no bloco A se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P$ partição de A tal que

$$S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon.$$

NOTAÇÃO: $\int_A f$ em $\mathbb{R}^2$ costuma ser denotada por

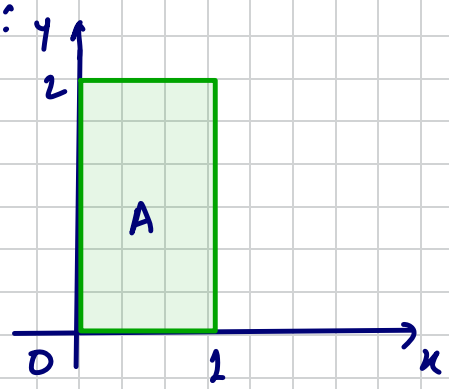
$$\int_A f = \iint_A f = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_A f(x,y)\,dy\,dx = \iint_A f(x,y)\,dA$$

Ex. cálculo de integral definida pela def.:

01) Calcule $\iint_A (3x+4y)\,dx\,dy$, sendo A o bloco:

$$A = [0,1] \times [0,2].$$

SOLUÇÃO:



Seja $P = P_1 \times P_2$ uma partição regular do bloco A, onde:

- P_1 divide $[0,1]$ em n subintervalos de comprimento

$$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$



$$P_1 = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1\},$$

onde $t_i = 0 + i \cdot \frac{1}{n} = \frac{i}{n}$.



- P_2 divide $[0,2]$ em m subintervalos de comprimento

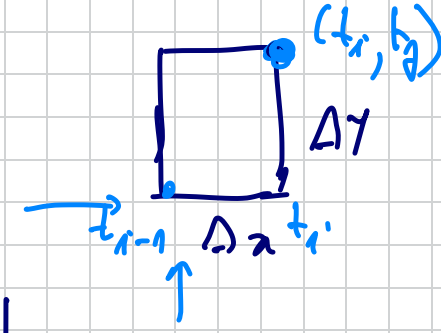
$$\Delta y = \frac{2-0}{m} = \frac{2}{m}$$

$$P_2 = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_m = 2\}; \text{ onde}$$

$$t_j = 0 + j \cdot \frac{2}{m} = \frac{2j}{m}.$$

Montando $S(f;P)$, obtemos:

$$S(f;P) = \sum_{B \in P} M_i \cdot Vol(B_i) \quad ;$$



onde $M_i = \sup_{(x,y) \in B_i} f(x,y) = f(x,y) \Big| \; x = \frac{i}{n} \; ; \; y = \frac{2j}{n}$

$f(x,y) = 3x + 4y$

$$= 3 \cdot \frac{i}{n} + 4 \cdot \frac{2j}{n} = \frac{3i}{n} + \frac{8j}{n} \quad ;$$

e $Vol\ B_i = \Delta x \cdot \Delta y = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{n \cdot n}$

Assim:

$$S(f;P) = \sum_{B \in P} M_i \cdot Vol(B_i) = \sum_{B \in P} \left(\frac{3i}{n} + \frac{8j}{n} \right) \cdot \frac{2}{nn}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{6i}{n \cdot n^2} + \frac{16j}{n^2 n} \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{6i}{nn^2} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{16j}{n^2 n}$$

$$= \frac{6}{nn^2} \sum_{j=1}^{n} 1 \cdot \sum_{i=1}^{n} i + \frac{16}{n^2 n} \cdot \sum_{j=1}^{n} j \cdot \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot =$$

$\sum_{j=1}^{n} 1 = 1+1+\dots+1$ (n vezes)

$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+\dots+n = \frac{(1+n) \cdot n}{2}$

$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{(1+n)n}{2}$

$\sum_{i=1}^{n} 1 = 1+1+\dots+1$ (n vezes)

$$= \frac{6}{m \cdot n^2} \cdot n \cdot \frac{(1+n)\,n}{2} + \frac{16}{n^2 m} \cdot \frac{(1+n)\cdot m}{2} \cdot n$$

$$= \frac{3\,(1+n)}{n} + \frac{8\cdot(1+n)}{m} =$$

$$= 3\cdot\left(\frac{1}{n}+1\right) + 8\cdot\left(\frac{1}{m}+1\right)$$

$$\Rightarrow S(f;P) = 3\cdot\left(\frac{1}{n}+1\right) + 8\cdot\left(\frac{1}{m}+1\right)$$

Efetuando um refinamento da partição, faremos $m, n \to \infty$, encontrando

$$\overline{\int_A} f = \lim_{m,n\to\infty} S(f;P) =$$

$$= \lim_{m,n\to\infty} 3\cdot\left(\frac{1}{n}+1\right) + 8\cdot\left(\frac{1}{m}+1\right)$$

($\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{1}{m} \to 0$)

$$= 3 * 8 = 11.$$

Conclusão: $\boxed{\overline{\int_A} f = 11.}$

Analogamente, se mostra que

$$\boxed{\underline{\int_A} f = 11}$$

Portanto, f é integrável, e

$$\iint_A f = 12.$$

Note que, integrar pela definição é bastante trabalhoso.

Nas próximas aulas, estudaremos técnicas e resultados para "escapar" de uma integração pela definição.

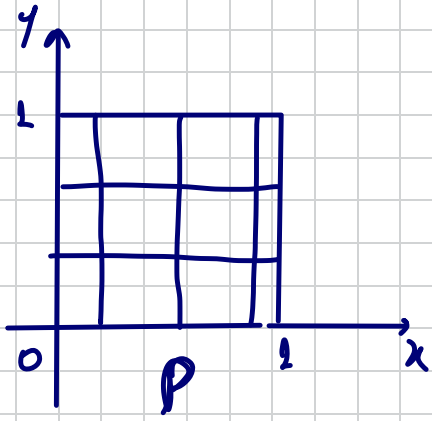
---

02) $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x, y \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } y \notin \mathbb{Q} \end{cases};$$

uma variante da função de DIRICHLET.

Seja P uma partição qualquer de $[0,1] \times [0,1]$.



Como $\mathbb{Q}$ é denso em $[0,1]$ então, $\forall B \in P$, vai haver ponto com ambas as coordenadas x, y racionais.

Então, $M_i = 1$.

Do mesmo modo, como o conjunto $\mathbb{I}$ dos irracionais também é denso em $[0,1]$, então

$\forall B \in P$ subbloco, temos pontos com alguma coordenada irracional. E então, $: m_i = 0$.

Assim:

- $S(f;P) = \sum_{B \in P} M_i \cdot Vol(B) = \sum_{B \in} Vol(B) = Vol(A)$

$M_i = 1$

$=$ área total de $A = (1-0)\cdot(1-0)$

$= 1.$

$\Rightarrow S(f;P) = 1$, $\forall P$ partição de A.

Então $\overline{\int_A} f = \lim_{m,n \to \infty} S(f;P) = 1.$

- $s(f;P) = \sum_{B \in P} m_i \cdot Vol(B) = 0$, $\forall P$-partição.

$m_i = 0$

Logo:

$$\underline{\int_A} f = \lim_{m,n \to \infty} s(f;P) = 0$$

$= 0$

Conclusão:

$$\underline{\int_A} f = 0 < 1 = \overline{\int_A} f.$$

Logo, f não é integrável (à Riemann)