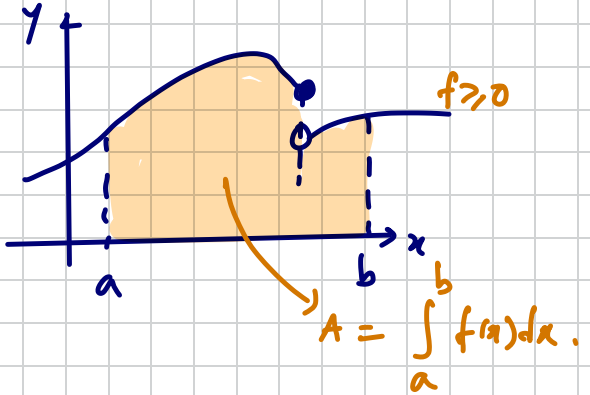
CÁLCULO 3

21/10/26 - AULA 26

INTEGRAIS MÚLTIPLAS:

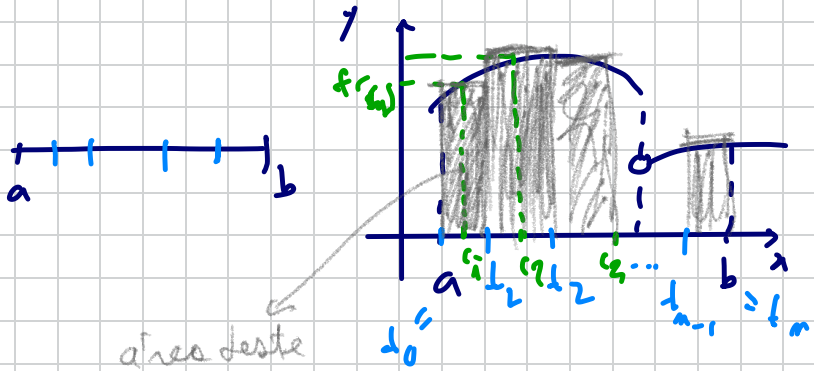
No cálculo 2, dada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, integrável, sendo $f\geq 0$, $\int_{[a,b]} f$ representava a área abaixo do gráfico de f no intervalo $[a,b]$.



Recordando, tomávamos uma partição P de $[a,b]$:

$P=\{a=t_0<t_1<t_2<\dots<t_n=b\}$; determinando subintervalos $[t_{i-1},t_i]$; e destacando, $f(c_i)$, com $c_i\in[t_{i-1},t_i]$, obtínhamos a soma de Riemann:

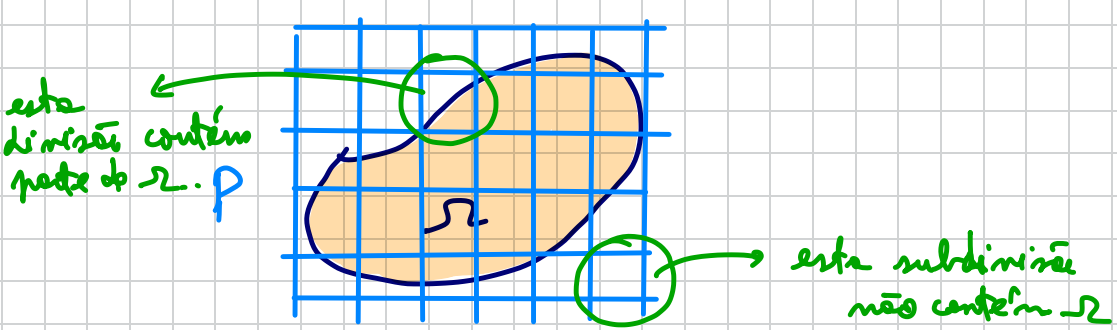
$$S(f;P)=\sum_{i=1}^{n} f(c_i).(t_i-t_{i-1})$$



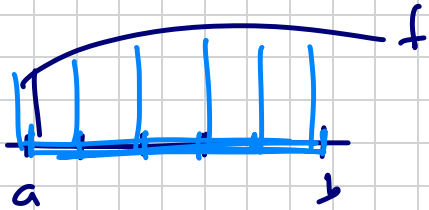
$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta t_i = \int_a^b f(x)\, dx$$

Queremos estender este resultado para funções de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}$. Porém, no caso de $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, como Ω agora é uma região do plano, uma partição P para Ω será uma grade, e esta, por mais "fina" que seja, terão divisões que não contêm Ω e divisões que contêm Ω parcialmente:



Essa situação não acontece para funções de uma variável real, pois tínhamos apenas um intervalo para dividir.



Por esta razão iniciamos o estudo de integrais múltiplas em blocos do $\mathbb{R}^m$.

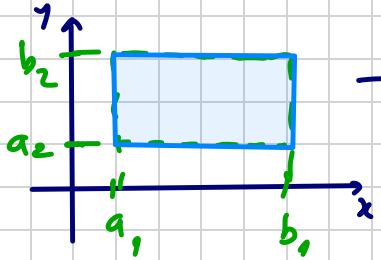
Blocos no $\mathbb{R}^m$:

Def.: Definimos um bloco A do $\mathbb{R}^m$ como o conjunto

$$A = \prod_{i=1}^{m} (a_i, b_i) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots (a_m, b_m).$$

Ex.: a) em $\mathbb{R}^2$:

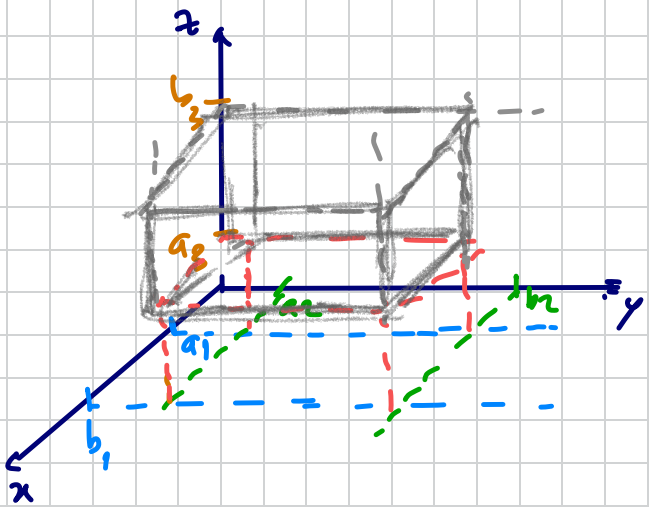
$$A = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2).$$



→ em $\mathbb{R}^2$, um bloco é um retângulo.

02) em $\mathbb{R}^3$:

$$A = \prod_{i=1}^{3} (a_i, b_i) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3)$$



03) em $\mathbb{R}$:

$A = (a, b)$ — intervalo.



Def.: O volume de um bloco A, denotado por $\text{Vol}(A)$ é um número ≥ 0 dado por:

$$\text{Vol}(A) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) =$$

$$= (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdots (b_m - a_m)$$

Ex. (a) em $\mathbb{R}^2$:

$$A = [0,2] \times [1,5].$$

$$\text{Vol}(A) = (2-0) \cdot (5-1)$$

$$= 2 \cdot 4 = 8 \text{ unidades de volume}$$

(em $\mathbb{R}^2$ o Vol(A) é a área do retângulo)

(b) em $\mathbb{R}^3$.

$$A = [1,3] \times [-1,4] \times [2,6].$$

$$\text{Vol}(A) = (3-1) \cdot (4-(-1)) \cdot (6-2)$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$$

(em $\mathbb{R}^3$ o volume do bloco corresponde ao volume do paralelepípedo formado)

(c) em $\mathbb{R}$:

$$A = [1, 7]$$

$$\text{Vol}(A) = 7 - 1 = 6$$

(em $\mathbb{R}$, o volume do bloco (intervalo) é o comprimento desse intervalo).

Def.: Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco de $\mathbb{R}^m$. Definimos por partição do bloco A como o conjunto

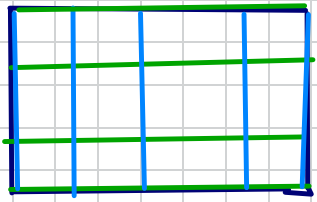
$P = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_m$, onde,

sendo

$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_m, b_m],$$

então

P_i é a partição do subintervalo $[a_i, b_i]$.



$P = P_1 \times P_2$

Uma partição P de um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$ divide o bloco A em sub-blocos $B \in P$. Assim:

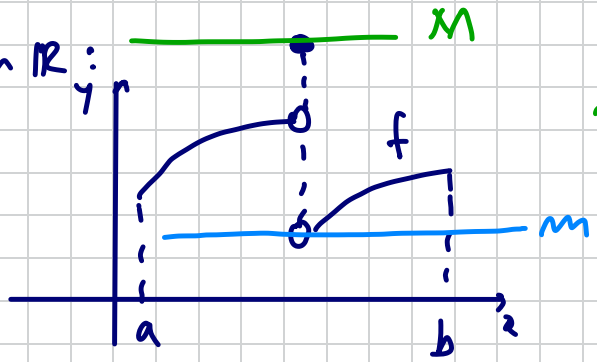
$$\text{Vol}(A) = \sum_{B \in P} \text{Vol}(B).$$

Def: Dizemos que uma função $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definida no bloco $A \subset \mathbb{R}^m$ é LIMITADA se $\exists M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in A$.

Def: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada no bloco A do $\mathbb{R}^m$. Definimos o ínfimo e o supremo de f no bloco A, respectivamente, por:

- $\inf_{x \in A} f(x) = m_i$ — a maior das cotas inferiores de f em A.
- $\sup_{x \in A} f(x) = M_i$ — a menor das cotas superiores de f em A.

Ex.: em $\mathbb{R}$:



f é limitada.

Perguntamos:

- f tem elemento máximo em $[a,b]$? Sim.

$$\text{máx. } f = M$$

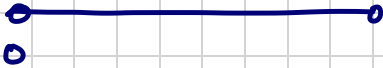
- f tem elemento mínimo em $[a,b]$?

Não, ele possui $m = \inf_{[a,b]} f(x)$

O ínfimo e o supremo de um conjunto servem para "preencher" possíveis lacunas que teríamos se usássemos mínimos e máximos. Do exemplo, o intervalo

$$(0,1);$$

possui elemento mínimo? E máximo?



- $(0,1)$ não tem elemento mínimo, mas possui ínfimo, e $\inf(0,1) = 0$

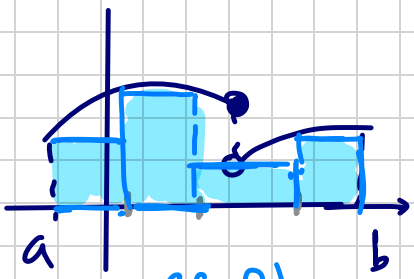
- $(0,1)$ não tem elemento máximo, mas possui supremo, e $\sup(0,1) = 1$.

Def.: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada em um bloco $A = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_m, b_m) \subset \mathbb{R}^m$, e $P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_m$ uma partição do bloco A.

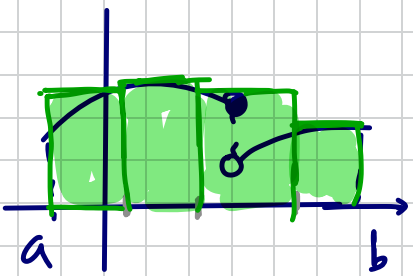
Definimos as somas inferior e superior de f em relação à partição P, respectivamente, por:

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{m} m_i \cdot \mathrm{Vol}(B) \quad ; \quad S(f, P) = \sum_{i=1}^{m} M_i \cdot \mathrm{Vol}(B)$$

No caso de $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$, então $s(f;P)$ representa uma aproximação da área abaixo do gráfico de f, por falta, enquanto que $S(f;P)$ representará uma aproximação da área abaixo do gráfico de f por excesso.



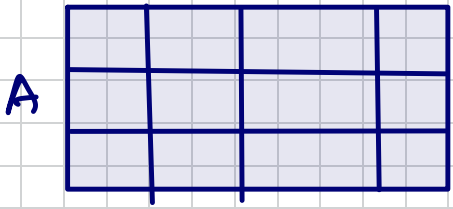
$s(f;P)$.



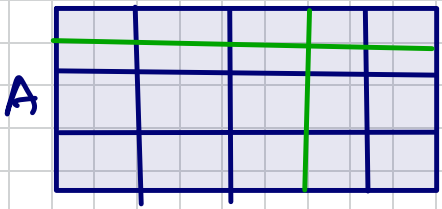
$S(f;P)$

Def.: Sejam P e Q duas partições de um bloco A de $\mathbb{R}^m$. Dizemos que Q é um refinamento de P se $Q \subset P$

Neste caso, dizemos que Q é mais fina do que P.



P - partição do bloco A



Q - refinamento da partição P.

Note que $Q \subset P$

Na que segue apresentaremos alguns lemas técnicos envolvendo somas superiores e inferiores:

LEMA 1: Seja $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada em um bloco A do $\mathbb{R}^m$ e P uma partição do bloco A. Então;

$$s(f;P) \leq S(f;P).$$

DEMONSTR: Note que, sendo P uma partição do bloco A, então determinamos subblocos B de A tais que

$$m_i \leq M_i \,, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Então, como $\text{Vol}(B) > 0$:

$$m_i \cdot \text{Vol}(B) \leq M_i \cdot \text{Vol}(B)$$

Somando em todos os i's de 1 até n, vem:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \text{Vol}(B)}_{= s(f;P)} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \text{Vol}(B)}_{S(f;P)}$$

Ou seja:

$$s(f;P) \leq S(f;P)$$

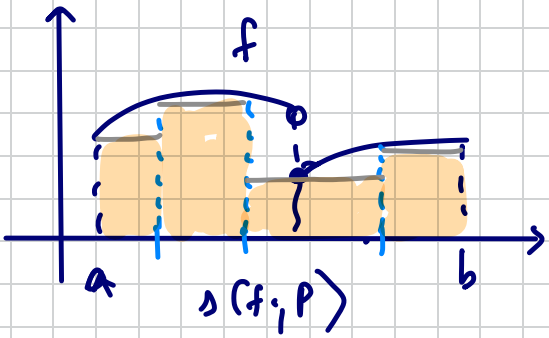
□

LEMA 2: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ limitada no bloco A de $\mathbb{R}^n$, e sejam P e Q partições do bloco A, onde $Q \subset P$, ou seja, Q é um refinamento de P. Então:

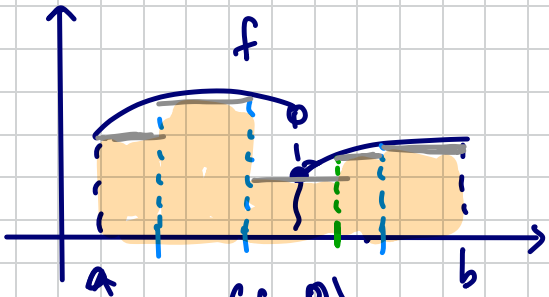
$$s(f;P) \leq s(f;Q) \leq S(f;Q) \leq S(f;P).$$

Ou seja, ao efetuar um refinamento a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta.

Ou seja, à medida em que refinamos mais e mais a partição P, as somas inferior e superior vão se aproximando.



$s(f; P)$



$s(f; Q)$

Q - refinamento de P.