Cálculo 3

19/10/26 – AULA 25

Na aula passada enunciamos o teste para derivada segunda para classificar os pontos críticos:

Se $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável em $a \in \text{int}(\Omega)$, tal que a é um ponto crítico (ou seja, $\nabla f(a) = \vec{0}$); as derivadas segundas de f são contínuas. Então:

(i) se $\det H(a) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$, então a é um ponto de máximo local.

(ii) se $\det H(a) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$, então a é um ponto de mínimo local.

(iii) se $\det H(a) < 0$, então a é um ponto de sela.

(iii) se $\det H(a) = 0$, o teste é inconclusivo.

No que segue apresentaremos exemplos de aplicação deste teste.

Ex.: Encontre os pontos críticos de cada função a seguir, classificando-os:

(a) $f(x,y) = x^2 - y^2$

Solução: pontos críticos: onde $\nabla f = \vec{0}$.

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x, -2y) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

PONTO CRÍTICO: $A(0,0)$.

matriz hessiana: $H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$.

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$
- $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2) = 0$.

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ (T. SCHWARZ)

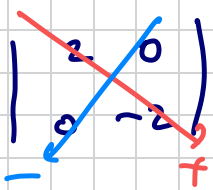
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-2y) = -2$

Assim, obtemos:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow H(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Disso, temos que:

$$\det H(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 0 = -4 < 0$$



Logo, $A(0,0)$ é um ponto de sela (pois cumpriu o item (iii) do teorema)

(b) $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$.

SOL:

pontos críticos: $\nabla f(x,y) = \vec{0}$.

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (8x^3 - 2x, 2y - 2)$$

Assim $\nabla f = \vec{0} \Leftrightarrow$

$(8x^3 - 2x,\ 2y - 2) = (0,0)$

$$\begin{cases} 8x^3 - 2x = 0 \\ 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

$8x^3 - 2x = 0 \longrightarrow 2x(4x^2 - 1) = 0$

$2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

$4x^2 = 1$

$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \boxed{x = \pm \frac{1}{2}}$

$2y - 2 = 0 \Rightarrow 2y = 2$

$\boxed{y = 1}$

PONTOS CRÍTICOS OBTIDOS: (x, y).

$A(0,1)$; $B\left(\frac{1}{2}, 1\right)$; $C\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

matriz hessiana:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$; onde:

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(8x^3 - 2x\right) = 24x^2 - 2$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(8x^3 - 2x\right) = 0$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ (T. SCHWARZ)
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2y - 2) = 2$

Assim, obtemos:

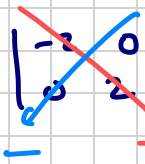
$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 24x^2-2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

classificação de cada ponto crítico:

- $A(0,1)$:

$$H(0,1) = \begin{bmatrix} 0-2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det H(0,1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-2)(2) - 0 = -4 < 0$$



Logo, $A(0,1)$ é um ponto de sela.

- $B\left(\frac{1}{2},1\right)$.

$$H\left(\frac{1}{2},1\right) = \begin{bmatrix} 24\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det H\left(\frac{1}{2},1\right) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 0 = 8 > 0$$



$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2},1\right) = 24\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = 4 > 0.$$

Logo, o ponto $B\left(\frac{1}{2},1\right)$ é um ponto de mínimo relativo.

• $C\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$:

$$H\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = \begin{bmatrix} 24\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det H\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = 24\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = 4 > 0$$

Logo $C\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ é um ponto de mínimo relativo.

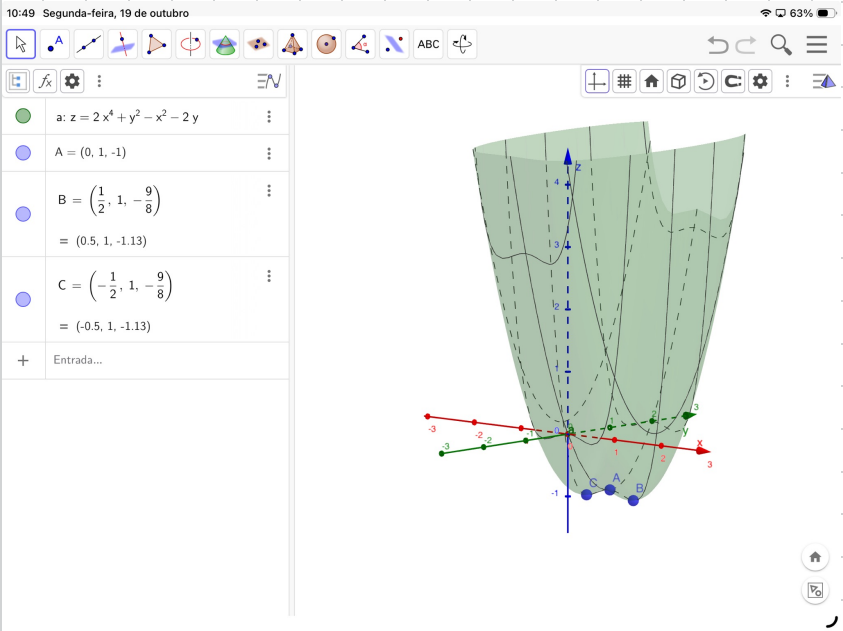
Obs: como curiosidade, vamos olhar estes pontos no gráfico pelo geogebra.

$$\boxed{f(x,y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y}$$

$$A(0, 1, f(0,1)) = A(0, 1, -1)$$

$$B\left(\frac{1}{2}, 1, f\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right) = B\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{9}{8}\right)$$

$$C\left(-\frac{1}{2}, 1, f\left(-\frac{1}{2}, 1\right)\right) = C\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{9}{8}\right)$$



(c) $f(x,y) = \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}y + \operatorname{sen}(x+y)$.

SOL.:

PONTOS CRÍTICOS: onde $\nabla f = \vec{0}$.

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\cos x + \cos(x+y), \cos y + \cos(x+y)\right) = (0,0)$$

$$\begin{cases} \cos x + \cos(x+y) = 0 \\ \cos y + \cos(x+y) = 0 \end{cases}$$

$$\cos x - \cos y = 0 \iff \cos x = \cos y$$



$$\cos x = \cos y \iff \begin{cases} x = y = +\frac{\pi}{4} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = y = +\underbrace{\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)}_{\frac{7\pi}{4}} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

PONTOS CRÍTICOS:

$$A\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right); \quad B\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi; \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right);$$

$\forall k \in \mathbb{Z}$.

MATRIZ HESSIANA:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}; \text{ onde:}$$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos x + \cos(x+y)\right) = -\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(x+y)$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\cos x + \cos(x+y)\right) = -\operatorname{sen}(x+y).$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\operatorname{sen}(x+y)$ (T. SCHWARZ)

- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\cos y + \cos(x+y)\right) = -\operatorname{sen} y - \operatorname{sen}(x+y)$

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(2x+y) & -\operatorname{sen}(x+y) \\ -\operatorname{sen}(x+y) & -\operatorname{sen} y - \operatorname{sen}(x+y) \end{bmatrix}$$

$$A\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

$\frac{\pi}{2} + 4k\pi$

$$H(A) = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 4k\pi\right) \\ -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 4k\pi\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 4k\pi\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 & -1 \\ -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det H(A) = \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 & -1 \\ -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2 - 1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)^2 - 1 > 0;$$

e como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = \underbrace{-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}_{h_{11}} < 0$; então

$A\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\,;\,\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$ são pontos de MÁXIMO local.

$\forall k \in \mathbb{Z}$.

- $B\left(\frac{7\pi}{4}+2k\pi,\ \frac{7\pi}{4}+2k\right)$: --- exercício ...

Obs: Combinando o teorema anterior com o teorema de Weierstrass, temos o seguinte resultado:

COROLÁRIO: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em um compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, com as derivadas segundas contínuas, então f assume valores máximo e mínimo em Ω, podendo ser na fronteira.

Vejamos um exemplo:

Ex.: Encontre o máximo de $f(x,y) = 2x + y - 3xy$ no quadrado $Q = [0,1] \times [0,1]$.

Solução: $Q = [0,1] \times [0,1]$ é um compacto de $\mathbb{R}^2$.

Logo, vão existir valores MÁX. e MÍN.

Estamos neste exercício, interessados em obter o MÁX.

PONTOS CRÍTICOS: Onde $\nabla f(x,y) = (0,0)$.

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (2 - 3y, 1 - 3x) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 3y = 0 \\ 1 - 3x = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \Rightarrow y = \frac{2}{3} \\ \Rightarrow x = \frac{1}{3} \end{array}$$

PONTO CRÍTICO: $A\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

matriz hessiana:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} \text{ ; onde:}$$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2-3y) = 0$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2-3y) = -3$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(1-3x) = 0$

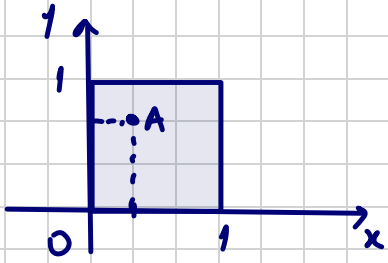
$$\Rightarrow H(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim:

$$H\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

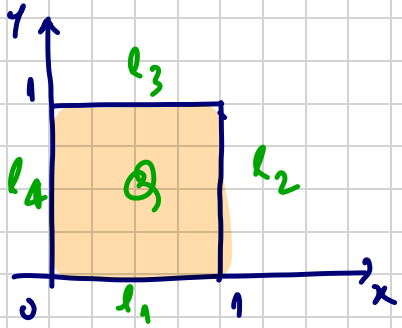
$$\Rightarrow \det H\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 9 < 0$$

Logo $A\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ é um ponto de sela.



$Q = [0,1] \times [0,1]$

Logo, f não assume valor máximo (e nem mínimo) nos pontos críticos. Mas, como Q é um compacto, concluímos que o máximo (e o mínimo) ocorre em ∂Q.



$\partial Q = l_1 \cup l_2 \cup l_3 \cup l_4$; onde:

$l_1 = \{(t,0);\ t \in [0,1]\}$

$l_2 = \{(1,t);\ t \in [0,1]\}$

$l_3 = \{(t,1);\ t \in [0,1]\}$

$l_4 = \{(0,t);\ t \in [0,1]\}$

$f(x,y) = 2x + y - 3xy$

- l_1: $f(t,0) = 2t + 0 - 3t \cdot 0 = 2t$

↓

na variável t é crescente e seu valor máximo ocorre.

quando $t=1$.

$\Rightarrow A(1,0)$. (pode ser máx. ou mínimo)

- l_2: $f(1,t) = 2.1 + t - 3.1.t$

$f(1,t) = \underbrace{2 - 2t}$

↳ na variável t, é decrescente, então, seu valor máximo ocorre no menor t, ou seja, em $t=0$:

$B(1,0)$ (pode ser máx. ou mín.

- l_3: $f(t,1) = 2t + 1 - 3.t.1$

$f(1,t) = \underbrace{-t + 1}$

↳ uma função decrescente na variável t; logo o máximo ocorre quando $t=0$:

$C(0,1)$. (pode ser máx. ou mín)

- l_4: $f(0,t) = 2.0 + t - 3.0.t = t$

$\Rightarrow f(0,t) = t$

crescente; e então seu valor máximo em $[0,1]$ ocorre quando $t = 1$, ou seja:

$D(0,1)$.

Obtemos, por fim, dois pontos: $(1,0)$ e $(0,1)$; tais que, sendo $f(x,y) = 2x + y - 3xy$, então:

- $f(1,0) = 2.1 + 0 - 3.1.0 = 2$ ← máximo.
- $f(0,1) = 2.0 + 1 - 3.0.1 = 1$ ← mínimo

conclusão: o máximo ocorre na fronteira de $Q = [0,1] \times [0,1]$, no ponto $(1,0)$; e o valor máximo será $f(1,0) = 2$.