

IMPORTANTE: solve a prova de sexta: quem quiser, e puder, pode iniciar a prova a partir das 8h, na sala 104 do PRÉDIO 05.

MÁXIMOS E MÍNIMOS:

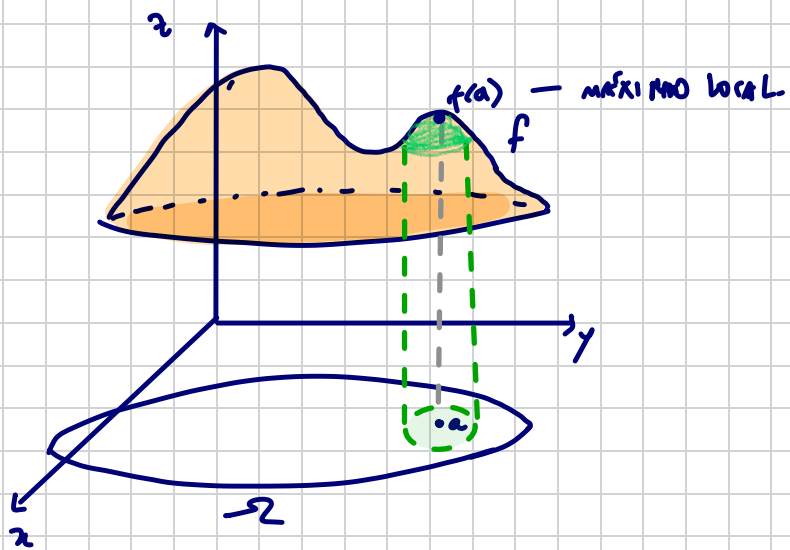
Def.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in \text{int}(\Omega)$.

Digamos que a é um ponto de máximo local de f .
 a é ponto de a , $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall x \in B_\delta(a)$, tivermos
$$f(x) \leq f(a)$$

Analogamente define-se ponto de mínimo local:

$a \in \text{int}(\Omega)$ é um ponto de mínimo local para $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se, e só se, $\exists \delta > 0$ tal que,
 $\forall x \in B_\delta(a)$, implicar em $f(x) \geq f(a)$

Abaixo temos um esboço para ilustrar os conceitos acima:

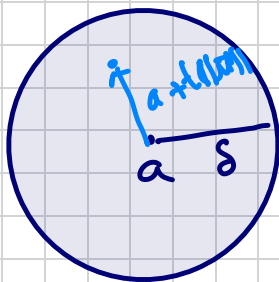


Def: Quando $\exists a \in \text{int}(\Omega)$ for tal que $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in \Omega$, então o ponto a é chamado de ponto de máximo global ou absoluto. Analogamente para mínimo global.

Em ambos os casos (máximo ou mínimo, local ou global); o ponto a é chamado de ponto extremo (relativo se for local ou absoluto se for global).

PROPOSIÇÃO: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $a \in \text{int}(\Omega)$ for um ponto extremo, então $\nabla f(a) = \vec{0}$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável e tome $a \in \text{int}(\Omega)$, a um ponto extremo. Sem perda de generalidade, assumamos que a seja um ponto de máximo local. Assim, $\exists 0 < \delta < 1$ tal que $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in B_\delta(a)$.



Seja $t \in \mathbb{R}$ tal que $|t| < \delta$.

Seja $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, com $\|\vec{u}\| = 1$. Assim:

$$a + t \cdot \|\vec{u}\| \in B_\delta(a). \quad (\text{para } |t| < \delta)$$

Desse forma, como a é ponto de máximo local, segue que

$$f(a + t \cdot \|\vec{u}\|) \leq f(a)$$

Disto, temos que:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(a + t \cdot \|\vec{u}\|) - f(a)}{t} \leq 0.$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(a + t \cdot \|\vec{u}\|) - f(a)}{t} \geq 0$$

Então, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) \leq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = 0.$$

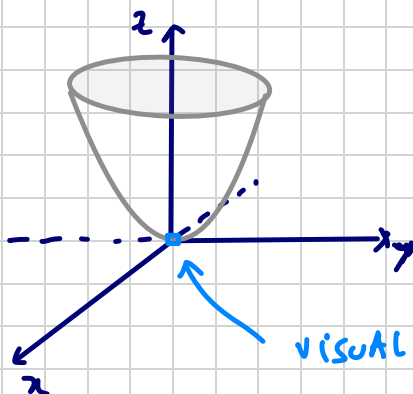
Assim:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \nabla f(a) \cdot \vec{u} \quad \Leftrightarrow \nabla f(a) = \vec{0}$$

ou $\|\vec{u}\| = 1.$

□

Ex. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$ (parabolóide)



VISUALMENTE TEMOS QUE
A ORIGEM $(0,0)$ É UM
PUNTO DE MÍNIMO GLOBAL.

ou seja é um ponto
extremo.

$$\text{Logo, } \nabla f(0,0) = (0,0)$$

De fato:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (2x, 2y)$$

$$\Rightarrow \nabla f(0,0) = (2 \cdot 0, 2 \cdot 0) = (0,0) = \vec{0}.$$

Obs.: A recíproca desse resultado, em geral, é falsa. Ou seja, o fato de que $\nabla f(a) = \vec{0}$, não implica que o ponto a seja um ponto extremo.

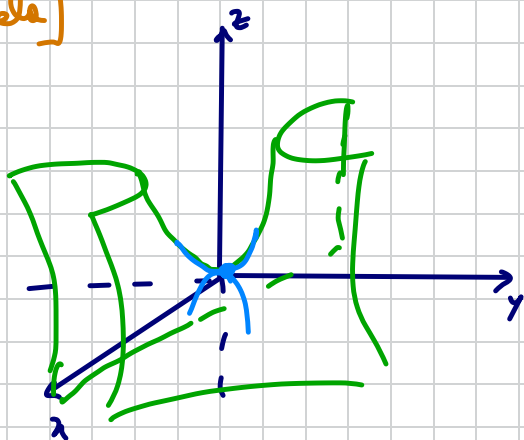
Seu exemplo tome $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Examinemos na origem $(0, 0)$: note que

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (2x, -2y)$$

$$\Rightarrow \nabla f(0, 0) = (0, 0) = \vec{0}, \text{ mas}$$

$(0, 0)$ não é ponto extremo de f (nem máx. nem mínimo) [é conhecido como ponto de sela]



Isto imagine definin o seguinte conceito:

Def: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

Dizemos que $a \in \text{int}(\Omega)$ é um ponto crítico de f se $\nabla f(a) = \vec{0}$.

Vejam os alguns exemplos:

Enche os pontos críticos das funções:

(a) $f(x, y) = x^2 + 4xy - y^2 - 8x - 6y$

Solução: Precisamos verificar quais pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $\nabla f(x, y) = (0, 0)$.

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left(\underbrace{2x + 4y - 8}_{=0}, \underbrace{4x - 2y - 6}_{=0} \right)$$

$$\Rightarrow \nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y - 8 = 0 \\ 4x - 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$\swarrow$
 $2 = 4 - 2y$

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ 2(4 - 2y) - y &= 3 \\ 8 - 4y - y &= 3 \\ -5y &= -5 \end{aligned}$$

$y = 1$

$$\Rightarrow x = 4 - 2y$$

$$x = 4 - 2 \cdot (1) \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

ponto crítico: $(x, y) = (2, 1)$.

(b) $f(x, y) = x + y \cdot \sin x$.

pontos críticos: onde $\nabla f = \vec{0}$

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (1 + y \cos x, \sin x)$$

logo:

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1 + y \cos x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x = k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}}$$



$$1 + y \cdot \underbrace{\cos(k\pi)}_{\pm 1} = 0$$

$$1 \pm y = 0 \Rightarrow \boxed{y = \pm 1}$$

pontos críticos obtidos: (x, y) :

$$(k\pi, 1) \text{ e } (k\pi, -1), \forall k \in \mathbb{Z}$$

No que segue, precisamos classificar pontos críticos (em máximo, mínimo ou nem máximo e nem mínimo). Antes porém, definimos o conceito de MATRIZ HESSIANA.

Def. Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, com derivadas parciais segundas contínuas. Definimos a matriz hessiana de f por:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

(matriz das derivadas segundas)

Obs.: Este resultado estende-se para funções de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}$:

$$H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{bmatrix}$$

Diante a este conceito temos a seguinte resultado:

TEOREMA: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $a \in \text{int}(\Omega)$, com a um ponto crítico de f ; e tal que as derivadas parciais segundas sejam contínuas. Então:

(i) Se $\det H(a) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$, então

o ponto a é um ponto de mínimo relativo.

(ii) Se $\det H(a) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$, então

o ponto a é um ponto de máximo relativo.

(iii) Se $\det H(a) < 0$, então o ponto a é um ponto de sela.

(iv) Se $\det H(a) = 0$, o teste é inconclusivo.

A demonstração desse resultado não é omitida.

□

Obs: Este teorema é conhecido como teste da derivada segunda.

Faremos exemplos na semana que vem.
