

AULA DE EXERCÍCIOS:LISTA 06:

4. Seja $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, e $r = \|\vec{r}\|$.

(a) Mostre que $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ e $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$. Conclua que $\nabla r = \frac{\vec{r}}{r}$.

(b) Mostre que $\nabla \ln r = \frac{\vec{r}}{r^2}$.

$$\vec{r} = (x, y) \quad , \quad \text{com} \quad r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$(a) \quad \frac{\partial r}{\partial x} = ?$$

$$\bullet \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\cancel{2}} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2} - 1} \cdot \cancel{2x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{\cancel{2}} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2} - 1} \cdot \cancel{2y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r}$$

$$\text{conclui:} \quad \nabla r = ? \quad r = r(x, y)$$

$$\left[\text{Obs: lembre que; sendo } f(x, y), \text{ então} \right. \\ \left. \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right]$$

$$\nabla r = \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y} \right) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right) = \frac{1}{r} (x, y) = \frac{\vec{r}}{r}.$$

$$(b) \nabla(\ln r) \stackrel{?}{=} \frac{\vec{r}}{r^2}.$$

$$\ln r = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \ln (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

$$\ln a^m = m \cdot \ln a$$

Assim, temos

$$g(x, y) = \ln r = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \quad (\ln r)' = \frac{1}{r}$$

$$\text{Então: } \nabla(\ln r) = \nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right); \text{ onde:}$$

$$\bullet \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2};$$

$$\bullet \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Portanto, obtemos:

$$\nabla(\ln r) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \vec{r}$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \vec{n} = \frac{\vec{n}}{n^2}$$

L6

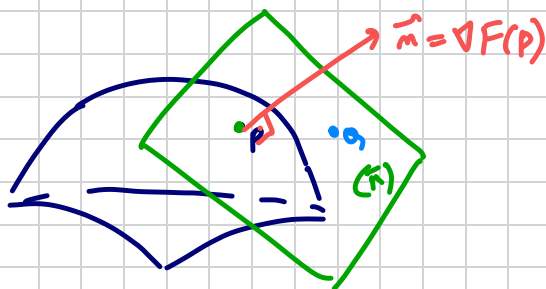
7. Obtenha a equação do plano tangente ao gráfico de cada superfície a seguir, nos pontos indicados:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$, no ponto $P(6, 2, 3)$ [Resp.: $6x + 2y + 3z - 49 = 0$]

(b) $f(x, y) = 3xy^3 + x^3$ em $P(2, 1)$.

(c) $f(x, y) = e^{x \cos y}$ em $P(-1, \frac{\pi}{2})$. [Resp.: $y + z = 1 + \frac{\pi}{2}$]

(c) $f(x, y) = e^{x \cdot \cos y}$; $P(-1, \frac{\pi}{2})$



$$F(x, y, z) = 0.$$

$\Downarrow$

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z$$

$$F(x, y, z) = e^{x \cdot \cos y} - z$$

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) ; \text{ onde:}$$

$$\bullet \frac{\partial F}{\partial x} = e^{x \cdot \cos y} \cdot \cos y ;$$

$$\bullet \frac{\partial F}{\partial y} = e^{x \cdot \cos y} \cdot (-x \cdot \sin y) = -x \sin y \cdot e^{x \cos y}$$

$$\bullet \frac{\partial F}{\partial z} = -1$$

$$\Rightarrow \nabla F = \left(\cos y \cdot e^{x \cos y}, -x \sin y \cdot e^{x \cos y}, -1 \right)$$

em $\mathbb{R}^3$:

$$P\left(-1, \frac{\pi}{2}, f\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)\right) ; \text{ onde } f\left(-1, \frac{\pi}{2}\right) = e^{-1 \cdot \cos \frac{\pi}{2}} = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow P\left(-1, \frac{\pi}{2}, 1\right)$$

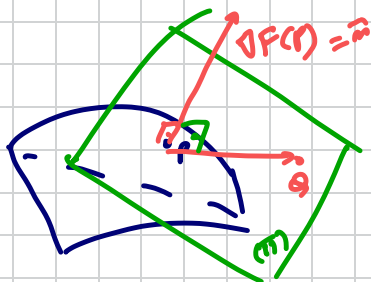
$$\Rightarrow \nabla F(P) = \left(\cos \frac{\pi}{2} \cdot e^{-1 \cdot \cos \frac{\pi}{2}}, -(-1) \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot e^{-1 \cdot \cos \frac{\pi}{2}}, -1 \right)$$

$$\nabla F(P) = (0, 1, -1) = \vec{n}$$

Dado $Q(x, y, z) \in (\pi)$, então

$$\vec{PQ} = Q - P = (x, y, z) - \left(-1, \frac{\pi}{2}, 1\right)$$

$$\vec{PQ} = (x+1, y-\frac{\pi}{2}, z-1)$$



$$(\pi): \nabla F(P) \cdot \vec{PQ} = 0$$

↑
pois os
vetores são
ortogonais.

$$(\pi): (0, 1, -1) \cdot \left(x+1, y-\frac{\pi}{2}, z-1\right) = 0$$

$$(\pi): \underbrace{0 \cdot (x+1)}_{=0} + 1 \cdot \left(y-\frac{\pi}{2}\right) - 1 \cdot (z-1) = 0$$

$$(\pi): y - \frac{\pi}{2} - z + 1 = 0$$

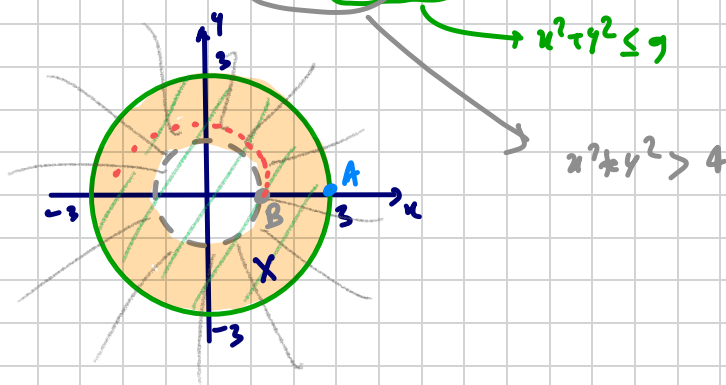
$$(\pi): y - 2 + 1 - \frac{\pi}{2} = 0$$

41:

12. Faça o desenho de cada região do $\mathbb{R}^2$ abaixo, identificando e justificando se a mesma é um aberto, ou fechado ou nem aberto e nem fechado do $\mathbb{R}^2$. Identifique o seu fecho e a sua fronteira. Decida também se algum deles é compacto do $\mathbb{R}^2$.

- (a) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 < x^2 + y^2 \leq 9\}$
 (b) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_1((x, y), (1, 0)) < 1\}$
 (c) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y < 1\}$
 (d) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_\infty((x, y), (0, 1)) \leq 1\}$

(a) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 < x^2 + y^2 \leq 9\}$.



X não é aberto pois possui pontos que não são interiores. Ex: $A(3,0)$ e tal que $A \in X$, mas $\forall \delta > 0, B_\delta(A) \not\subset X$. (não é interior a X).

X também é fechado, pois, por exemplo;

$B(1,0) \notin X$, mas existe seq. $(x_n) \subset X$

tal que $x_n \rightarrow B$

FRONTEIRA DE X : $\partial X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9 \text{ e } x^2 + y^2 = 4\}$

FECHO DE X : $\overline{X}$:

$$\overline{X} = X \cup \partial X =$$

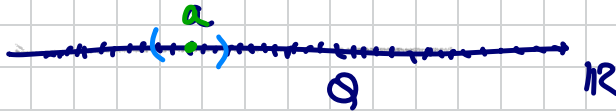
$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Concluindo, X não é compacto, pois embora seja limitado, não é fechado.



L1:

11. Mostre que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é fechado e nem aberto de $\mathbb{R}$. Qual é o fecho de $\mathbb{Q}$?



Seja $a \in \mathbb{Q}$. $\forall \delta > 0$, $B_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$

Porém, entre dois números racionais quaisquer, sempre é possível destacar um irracional, ou seja, o conj. dos irracionais é denso em $\mathbb{R}$ (e dos racionais também). Logo, $\forall \delta > 0$, $B_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$ contém, números irracionais. Logo, $B_\delta(a) \not\subset \mathbb{Q}$, $\forall a \in \mathbb{Q}$.

conclusão: nenhum ponto dos racionais é interior aos racionais, ou seja; $\text{int } \mathbb{Q} = \emptyset$.

Ou seja, Q não é aberto, pois não tem interior.

Analogamente se conclui que o conj. I dos irracionais não é aberto de $\mathbb{R}$.

Q também não é fechado pois o seu complementar é I e I também não é aberto.

RESULTADO:
 X aberto $\Leftrightarrow X^c$ é fechado.

Por fim, calculemos o fecho de Q .

$$\overline{Q} = Q \cup \underline{Q} = Q \cup \underline{I} = \mathbb{R}.$$



PROVA ANTIGA, DE 2023:

Questão 02. Seja a função vetorial $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\vec{f}(t) = (2 \sin t, 2t, 2 \cos t)$.

- (a) [Peso 1] Obtenha um vetor tangente ao gráfico de $\vec{f}$ no ponto $P(2, \pi, 0)$. Obtenha também a equação da reta tangente ao gráfico de $\vec{f}$ no mesmo ponto P dado.

O vetor tangente é dado por:

$$\vec{f}'(t) = (2 \cos t, 2, -2 \sin t)$$

$\vec{f}'(t_0)$, onde t_0 é tal que fornece o ponto P .

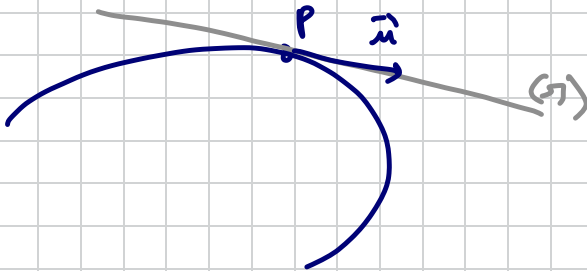
$$P(2, \pi, 0)$$

$\begin{matrix} x & y & z \end{matrix}$

$$\vec{f}(t) = (\underbrace{2\sin t}_x, \underbrace{2t}_y, \underbrace{2\cos t}_z)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\sin t = 2 \\ 2t = \pi \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ 2\cos t = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\underbrace{2\cos\frac{\pi}{2}}_0, 2, -\underbrace{2\sin\frac{\pi}{2}}_1 \right) = (0, 2, -2)$$



$$\vec{u} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 2, -2)$$

$$P(2, \pi, 0)$$

$$(1): \begin{cases} x = x_p + at \\ y = y_p + bt \\ z = z_p + ct \end{cases};$$

$$\text{onde } (a, b, c) = \vec{u}$$

(VECTORDIRECTOR DA RETA)

$$(1): \begin{cases} x = 2 + 0t \\ y = \pi + 2t \\ z = 0 - 2t \end{cases}$$

DA MESMA PRONHA:

de ponto $a = (0, 1, \dots, -1)$.

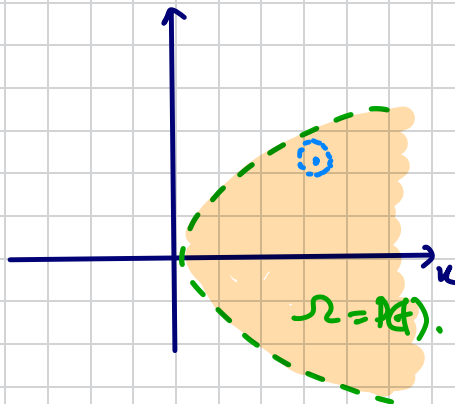
Questão 03. Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x + \ln(x - y^2)$.

- (a) [Peso 2] Determine o domínio Ω e faça o seu esboço. Em seguida, decida se Ω é um aberto de $\mathbb{R}^2$. Determine também o seu fecho e sua fronteira. A origem é um ponto interior de Ω ? Justifique.
- (b) [Peso 1] Calcule o diferencial total df e a derivada mista $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.
- (c) [Peso 1] Determine $\frac{\partial f}{\partial r}$ e $\frac{\partial f}{\partial s}$, onde $x = r^2 s^2$ e $y = 2rs$.
- (d) [Peso 0,5] Determine a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}$, sendo $\vec{u} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

$$f(x, y) = x + \ln(x - y^2)$$

(a) condição de existência: $x - y^2 > 0$
 $x > y^2$

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y^2\}.$$



Ω é aberto de $\mathbb{R}^2$
pois, dado $a \in \Omega$,
 $\exists \delta > 0$ tal que
 $B_\delta(a) \subset \Omega$.
(ou seja, todo ponto
é interior)

$$\partial X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$$

$$\overline{X} = X \cup \partial X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2\}$$

$(0,0) \in \text{int } \overline{X}$? Não, pois $(0,0) \notin \text{Int } X$.

(b) $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$. (diferencial total)

Como $f(x, y) = x + \ln(x - y^2)$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{1}{x - y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{x - y^2}.$$

Assim:

$$df = \left(1 + \frac{1}{x - y^2}\right) dx + \left(\frac{-2y}{x - y^2}\right) dy.$$

Além disso, queremos obter $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) =$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-2y}{x - y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-2y \cdot (x - y^2)^{-1} \right) =$$

↑
APENAS "ORGANIZAMOS"

$$= -2y \cdot (-1) (x-y^2)^{-2} \cdot (1) = \frac{2y}{(x-y^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2y}{(x-y^2)^2}$$

(c) temer: $f(x, y) = x + \ln(x-y^2)$; e do

item(b): $\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{1}{x-y^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{x-y^2}$

Anim; como $x = \pi \lambda^2$ e $y = 2\pi \lambda$, pela regra da cadeia, tem:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{x-y^2}\right) \cdot \lambda^2 + \left(\frac{-2y}{x-y^2}\right) \cdot 2\lambda \quad ; \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{x-y^2}\right) \cdot 2\pi \lambda + \left(\frac{-2y}{x-y^2}\right) \cdot 2\pi \end{aligned}$$

$$d) \frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \nabla f \cdot \vec{u} ; \quad \text{onde } \vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

importante: note que $\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left(1 + \frac{1}{x-y^2}, \frac{-2y}{x-y^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \nabla f \cdot \vec{u} = \left(1 + \frac{1}{x-y^2}, \frac{-2y}{x-y^2} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

↑
produto escalar.

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{x-y^2} \right) - \frac{\sqrt{3} y}{x-y^2}$$