

AULA EXTRA DE EXERCÍCIOSLISTA 03.

12. Seja G um grupo de ordem p^n , onde p é primo e $n > 1$. Mostre que a ordem de um elemento qualquer de G é uma potência de p .

$$|G| = p^m, \quad m > 1.$$

Seja $g \in G$. Queremos mostrar que $o(g) = p^k$,
 $k \in \mathbb{N}^+$

Dado $g \in G$, temos que $o(g) = |\langle g \rangle|$; onde
 $\langle g \rangle$ é o subgrupo gerado por $g \in G$.

Pelo teorema de Lagrange, temos que

$$|\langle g \rangle| \mid |G|; \text{ e como por hipótese,}$$

$$|G| = p^n; \quad p - \text{primo}; \quad \text{então temos}$$

$$|\langle g \rangle| \mid p^n. \quad \text{Então,}$$

$$\exists t \in \mathbb{N} \text{ tal que } t \cdot |\langle g \rangle| = p^n$$

$$\Rightarrow |\langle g \rangle| = \frac{p^n}{t};$$

e como $|\langle g \rangle| \in \mathbb{N}$; devemos ter $t = p_j^k$
com $k \leq m$.

Da ref: $|\langle g \rangle| = \frac{p^n}{p^k} = p^{n-k}$, com $n > k$.

Logo e' , a ordem de um elemento $g \in G$
é uma potência de p , com p -primo.

LÍSTRA 2 :

$\lambda \in \Lambda$

8. Sejam G um grupo e $(H_i)_{i \in I}$ uma família de subgrupos de G . Suponha que $\forall i, j \in I$,
 $H_i \subset H_j$ ou $H_j \subset H_i$. Mostre que $\bigcup_{i \in I} H_i < G$.

Se tirarmos a hipótese $\forall i, j \in I$, $H_i \subset H_j$ ou $H_j \subset H_i$, a tese continua válida?
Justifique.

$$H_i < G, \quad \forall i \in I$$

$$H_i \subset H_j \text{ ou } H_j \subset H_i, \quad \forall i, j \in I.$$

A mostrar: $\bigcup_{i \in I} H_i < G$.

Dados $\alpha, \beta \in \bigcup_{i \in I} H_i$, precisamos mostrar que:

1. $\alpha \cdot \beta \in \bigcup_{i \in I} H_i$;

2. $\alpha \in \bigcup_{i \in I} H_i \Rightarrow \alpha^{-1} \in \bigcup_{i \in I} H_i$

Como $\alpha, \beta \in \bigcup_{i \in I} H_i$, segue, pela definição de união de conjuntos, que $\exists i_0 \in I$ tal que $\alpha \in H_{i_0}$ e $\exists j_0 \in I$ tal que $\beta \in H_{j_0}$.

Como $H_{i_0} \subset H_{j_0}$ ou $H_{j_0} \subset H_{i_0}$; sem perda de generalidade, admita que $H_{i_0} \subset H_{j_0}$.

Então:

$$\alpha \in H_{i_0} \subset H_{j_0}; \text{ e } \beta \in H_{j_0};$$

e como, em particular, $H_{j_0} < G$, segue que

$$\alpha \cdot \beta \in H_{j_0} \subset \bigcup_{i \in I} H_i; \text{ o que}$$

prova ①.

Mostremos ②:

Como $\alpha \in \bigcup_{i \in I} H_i$, então $\alpha \in H_{i_0}$, para algum $i_0 \in I$. E, como $H_{i_0} < G$, então

$$\alpha^{-1} \in H_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} H_i; \text{ o que prova ②}$$

Portanto, segue que $\bigcup_{i \in I} H_i < G$.

Sejam agora a segunda parte do problema:
 se tivermos que $H_i \subset H_j$ ou $H_j \subset H_i$, $\forall i, j \in I$,
 afirmamos que o resultado é falso; ou seja,
 $\bigcup_{i \in I} H_i$ não seria subgrupo de G .

Um exemplo:

$$S_4 = \{ \text{id}, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}, R_1, R_2, R_3 \}$$

$$H_1 = \{ \text{id}, R_1 \} < S_4 \quad ; \quad H_2 = \{ \text{id}, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}} \} < S_4$$

Note que $H_2 \not\subset H_1$ e $H_1 \not\subset H_2$.

$$\text{E, de fato, } H_1 \cup H_2 = \{ \text{id}, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}, R_1 \}$$

obviamente não é subgrupo de G ; até porque

$$|H_1 \cup H_2| = 4 \quad ; \quad |G| = 6, \text{ mas}$$

e $4 \nmid 6$ (ou seja, não
 vale o T. de
 Lagrange)

LÍSTAO3:

5. Se $ghg^{-1} \in H$, para todo $g \in G$ e $h \in H$, $H < G$, mostre que $gH = Hg$, $\forall g \in G$, i.e., as classes laterais à esquerda e à direita, neste caso, são idênticas.

$H < G$, com $ghg^{-1} \in H$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$.

A mostrar: $gH = Hg$, $\forall g \in G$.

AF-01: $gH \subset Hg$:

Dado $x \in gH$, precisamos mostrar que $x \in Hg$.

$$x \in gH \Rightarrow x = g \cdot h : h \in H.$$

Demo:

$$x = \underbrace{ghg^{-1}}_{\substack{\in H \\ \text{por hipótese}}} \cdot g \in Hg.$$

Dele arbitrariedade de escolha de $x \in gH$, mostramos que vale a AF01.

AF-02: $Hg \subset gH$:

Dado $w \in Hg$, precisamos mostrar que $w \in gH$. De fato, como $w \in Hg$, então,

$$w = h.g ; \text{ com } h \in H.$$

Assim:

$$\underline{w} = h.g = g \cdot \underbrace{g^{-1} h (g^{-1})^{-1}}_{\in H}, \quad \underline{\in gH}$$

onde $g^{-1} \in G$.

Daí seja, obtemos $w \in gH$.

Dele arbitrariedade da escolha de w prova-se

a AF02.

Assim, pelas afirmações 01 e 02 segue
que $gH = Hg$.

~~~~~