

Na última aula teórica estudamos o importante teorema de Lagrange:

T. LAGRANGE: Seja G um grupo finito e $H < G$.

Então, $|H| \mid |G|$.

Ou seja, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $m \cdot |H| = |G|$.

Mais precisamente, m é chamado de índice de H em G , e é denotado por $m = (G:H)$.

Do que segue vamos apresentar algumas consequências desse teorema:

COROLÁRIO 1: Todo grupo finito de ordem prima é cíclico.

DEMONSTRAÇÃO: Seja G um grupo com $|G| = p$, onde $p > 1$ é um número primo.

Então, $\exists g \in G$, tal que $g \neq e$.

Considere $\langle g \rangle = \{g^m : m \in \mathbb{Z}\}$.

Como $\langle g \rangle < G$, pelo teorema de Lagrange segue que $|\langle g \rangle| \mid |G|$; ou seja,

$$|\langle g \rangle| \mid p; \text{ onde } p \text{ é primo.}$$

Assim, segue que $|\langle g \rangle| = 1$ ou $|\langle g \rangle| = p$

Como, por construção, $\langle g \rangle$ contém pelo menos dois elementos, g e e , segue que $|\langle g \rangle| = p$; ou seja, $\langle g \rangle$ contém todos os elementos de G ; logo, $\langle g \rangle = G$, i.e.; G é cíclico $\square$

COROLÁRIO 2: Se G for um grupo tal que $|G| \leq 5$, então G é abeliano.

DEMONSTRA: Seja G um grupo com $|G| \leq 5$

- se $|G| = 1$. Neste caso, $G = \{e\}$; logo, é abeliano, pois só tem um elemento para operar com si mesmo.

- se $|G| = 2, 3$ ou 5 : como neste caso, a ordem é primo, pelo corolário anterior

segue que G é cíclico, e por um teorema anterior (aula 04) segue que G é abeliano.

- se $|G| = 4$: neste caso temos duas possibilidades:

1.º: se G for cíclico; então por teorema (da aula 04), G é abeliano.

2.º: se G não for cíclico: então vale a seguinte afirmação:

AF: $\forall x \neq e, x^2 = e.$

Seja $x \neq e$ e considere o subgrupo

$$\langle x \rangle = \{x^m : m \in \mathbb{Z}\}.$$

Pelo T. de Lagrange, segue que

$$|\langle x \rangle| \mid |G|; \text{ com } |G| = 4;$$

ou seja, $|\langle x \rangle| \mid 4$. Disso, segue que $|\langle x \rangle| = 1$, $|\langle x \rangle| = 2$ ou $|\langle x \rangle| = 4$.

Como $x \neq e$; $\langle x \rangle$ contém pelo menos x e e . Logo, $|\langle x \rangle| \neq 1$.

Do mesmo modo, $|\langle x \rangle| \neq 4$, pois

$|G| = 4$, e G não é cíclico.

Portanto, $| \langle x \rangle | = 2$. Ou seja;

$$\langle x \rangle = \{x, e\}$$

Disto; $x^2 = e$. Logo, vale a ff.

Assim, multiplicando por x^{-1}
à esquerda, vem:

$$x^{-1} \cdot x^2 = x^{-1} \cdot e$$

$$\underbrace{(x^{-1} \cdot x)}_e = x^{-1}$$

$\Rightarrow x = x^{-1}$
(ou seja, todo elemento é
simétrico de si mesmo)

Assim, dados $\alpha, \beta \in G$, então

$$\underbrace{\alpha \cdot \beta} = (\alpha \beta)^{-1} = \beta^{-1} \cdot \alpha^{-1} = \underbrace{\beta \cdot \alpha};$$

ou seja, G é abeliano.

□

COROLÁRIO 3: Sejam $K < H < G$, onde G é um grupo finito. Então:

$$(G:K) = (H:K) \cdot (G:H)$$

DEMONSTR.: Sejam $K < H < G$.

Em particular, $K < H$. Então, pela T. de Lagrange, segue que $|K| \mid |H|$, ou seja, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que

$$m \cdot |K| = |H| \quad (I)$$

A saber: $m = (H:K)$

Também temos que $H < G$. Então, pela T. de Lagrange segue que $|H| \mid |G|$, ou seja, $\exists l \in \mathbb{N}$ tal que

$$l \cdot |H| = |G| \quad (II)$$

A saber: $l = (G:H)$

Do mesmo modo temos que $K < G$. Então,
pelo T. de Lagrange segue que $|K| \mid |G|$, ou
seja, $\exists w \in \mathbb{N}$ tal que

$$w \cdot |K| = |G| \quad (\text{II})$$

A saber: $w = (G : K)$

De (I), (II) e (III) obtemos:

$$l \cdot (m \cdot |K|) = l \cdot |H| = |G| = w \cdot |K|$$

$$\Rightarrow l \cdot m \cdot \cancel{|K|} = w \cdot \cancel{|K|}$$

$$\Rightarrow l \cdot m = w$$

$$(G : H) \cdot (H : K) = (G : K)$$

□

RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS

LISTA 02

9. Sejam H e K dois subgrupos de um grupo G . Defina o conjunto HK por

$$HK = \{ab : a \in H \text{ e } b \in K\}.$$

Mostre que $HK < G \Leftrightarrow HK = KH$.

$$H < G ; K < G$$

$$HK = \{a \cdot b : a \in H \text{ e } b \in K\}$$

$(\Rightarrow)$ Suponha que $HK < G$.

A mostrar: $HK = KH$.

AF. 01: $HK \subset KH$:

Sei absurdo, se $HK \not\subset KH$; então $\exists \alpha \in HK$
tal que $\alpha \notin KH$. (*)

Disso,

$$\alpha \in HK \Rightarrow \exists h \in H, \exists k \in K \text{ tais que } \alpha = hk.$$

Como $HK < G$, segue que $\alpha^{-1} \in HK$; ou seja,

$$\alpha^{-1} = (hk)^{-1} = \underbrace{k^{-1}}_{\in K} \cdot \underbrace{h^{-1}}_{\in H} \in KH$$

Além disso, como $HK < G$, então $\alpha^{-1} \in HK$.

Logo,

$$\alpha^{-1} = k^{-1} \cdot h^{-1} = \tilde{h} \cdot \tilde{k}$$

$$\Rightarrow \alpha^{-1} = \tilde{h} \tilde{k} \text{ . Então:}$$

$$\alpha = (\alpha^{-1})^{-1} = (\tilde{h} \tilde{k})^{-1} = \tilde{k}^{-1} \cdot \tilde{h}^{-1} \in KH$$

$\Rightarrow \alpha \in KH$; mas isso entra em contradição com (1)

Abusado!

Portanto, $HK \subset KH$.

AF.02: $KH < HK$:

Dado $\alpha \in KH$; mostrar que $\alpha \in HK$.

Sejam $k \in K$ e $h \in H$ tais que

$$\alpha = k \cdot h \text{ .}$$

Então:

$$\alpha^{-1} = (kh)^{-1} = h^{-1} \cdot k^{-1} \in HK$$

Como $HK < G$, segue que $\alpha \in HK$.

(pois $\alpha^{-1} \in HK$) .

Isso prova a AF.02.

Se as afirmações 01 e 02 seguem a igualdade,
ou seja, $HK = KH$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que $HK = KH$.

A mostrar: $HK < G$.

Dados $\alpha, \beta \in HK$, precisamos mostrar que:

(i) $\alpha \cdot \beta \in HK$;

(ii) $\alpha^{-1} \in HK$.

Como $\alpha, \beta \in HK$, então $\exists h_1, h_2 \in H$ e $\exists k_1, k_2 \in K$ tais que

$$\alpha = h_1 \cdot k_1 \quad \text{e} \quad \beta = h_2 \cdot k_2$$

Assim:

$$\alpha \cdot \beta = (h_1 \cdot k_1) \cdot (h_2 \cdot k_2) = h_1 \cdot \underbrace{(k_1 \cdot h_2)}_{\substack{\tilde{h} \in KH \\ \tilde{k} \in K}} \cdot k_2 =$$

$$= h_1 \cdot \underbrace{(\tilde{h} \cdot \tilde{k})}_{\in H} \cdot k_2 \in HK.$$

$$\Rightarrow \alpha \cdot \beta \in HK.$$

Isso prova (i). Mostremos (ii):

$$\alpha^{-1} = (h_1 \cdot k_1)^{-1} = k_1^{-1} \cdot h_1^{-1} \in KH = HK.$$

↑
hipótese

Logo, vale (ii).

De (i) e (ii) segue que $HK < G$.

10. Seja G um grupo e $H < G$. Defina o conjunto $N(H)$ por

$$N(H) := \{g \in G : gHg^{-1} = H\}.$$

O conjunto $N(H)$ é chamado de *normalizador de H em G* . Mostre que $N(H) \neq \emptyset$ e prove que $N(H) < G$.

$H < G$.

$$N(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$$

1º: $N(H) \neq \emptyset$: (i.e., está bem definido)

$e \in N(H)$, pois

$$eH \underbrace{e^{-1}}_{=e} = eH \cdot e = H$$

Logo, $N(H) \neq \emptyset$.

ou seja, se multiplicar todos os elementos de H à esquerda e à direita por e , resulta em todos os elem. de H

2.º: $N(H) < G$:

Para cada $\alpha, \beta \in N(H)$, precisamos mostrar que:

(i) $\alpha \cdot \beta \in N(H)$;

(i') $\alpha^{-1} \in N(H)$.

Como $\alpha, \beta \in N(H)$, então:

$$\alpha H \cdot \alpha^{-1} = H \quad \text{e} \quad \beta H \beta^{-1} = H.$$

Além disso:

$$\begin{aligned} (\alpha\beta) H (\alpha\beta)^{-1} &= (\alpha\beta) H (\beta^{-1} \cdot \alpha^{-1}) = \\ &= \alpha (\underbrace{\beta H \beta^{-1}}_{=H}) \alpha^{-1} = \alpha H \alpha^{-1} = H \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\alpha\beta) H (\alpha\beta)^{-1} = H.$$

Logo, $\alpha\beta \in N(H)$.

Resta mostrar (ii).

Note que, como $\alpha \in N(H)$; então:

$$\alpha H \alpha^{-1} = H$$

Multiplicando à esquerda por α^{-1} , vem:

$$\alpha^{-1} \cdot (\alpha H \alpha^{-1}) = \alpha^{-1} \cdot H$$

$$\Rightarrow e H \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot H$$

$$\Rightarrow H \alpha^{-1} = \alpha^{-1} H$$

Multiplicando à direita por α , vem:

$$(H \alpha^{-1}) \alpha = \alpha^{-1} H \cdot \alpha$$

$$H \cdot e = \alpha^{-1} H \alpha$$

$$\Rightarrow H = \alpha^{-1} H \alpha$$

$$H = \alpha^{-1} H (\alpha^{-1})^{-1}$$

$$\Rightarrow \alpha^{-1} \in N(H), \text{ porendo (2.2)}$$

Portanto, $N(H) < G$.

6. Sejam G um grupo e $H < G$. Seja $x \in G$. Considere o conjunto xHx^{-1} o subconjunto de G formado por todos os elementos xhx^{-1} com $h \in H$. Mostre que $xHx^{-1} < G$.

$$xHx^{-1} = \{ xhx^{-1} : h \in H \}.$$

A mostrar: $xHx^{-1} < G$.

Dados $\alpha, \beta \in xHx^{-1}$.

A mostrar: (i) $\alpha \cdot \beta \in xHx^{-1}$;

(ii) $\alpha^{-1} \in xHx^{-1}$.

Como $\alpha, \beta \in xHx^{-1}$, então, $\exists h_1, h_2 \in H$

tais que $\alpha = xh_1x^{-1}$ e $\beta = xh_2x^{-1}$

Demo:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta &= (xh_1x^{-1}) \cdot (xh_2x^{-1}) = \\ &= xh_1(\underbrace{x^{-1}x}_e)h_2x^{-1} = x(\underbrace{h_1h_2}_{\in H})x^{-1} \in xHx^{-1}. \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}\alpha^{-1} &= (x h_1 x^{-1})^{-1} = (x^{-1})^{-1} h_1^{-1} x^{-1} \\ &= x \underbrace{h_1^{-1}}_{\in H} x^{-1} \in \underbrace{x H x^{-1}}\end{aligned}$$

Logo, $x H x^{-1} \leq G$.

7. Sejam H e K dois subgrupos de um grupo G .

(a) Mostre que $H \cap K$ é um subgrupo de G .

(b) Mais geralmente, sendo $(H_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de subgrupos de G , mostre que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$ é um subgrupo de G .

(a) $H \cap K \neq \emptyset$ pois $e \in H$ e $e \in K$,
logo, $e \in H \cap K$.

Dados $\alpha, \beta \in H \cap K$. Então, $\alpha, \beta \in H$ e

$\alpha, \beta \in K$.

Como $H < G$ e $K < G$;

$\alpha \cdot \beta \in H$ e $\alpha \cdot \beta \in K$.

Logo, $\alpha \cdot \beta \in H \cap K$. (*)

Dado $\alpha \in H \cap K$. Então, $\alpha \in H$ e $\alpha \in K$.

Como $H, K < G$, segue que $\alpha^{-1} \in H$ e $\alpha^{-1} \in K$.

Portanto, $\alpha^{-1} \in H \cap K$. (**)

De (*) e (**) segue que $H \cap K < G$.

(b) exercício.
