

SUBGRUPOS NORMAIS:

INTRODUÇÃO: Sejam G um grupo e $H < G$.

Se G for abeliano, então, $\forall x \in G$, tem-se que $Hx = xH$;

ou seja, dado $x \in G$, a classe lateral à esquerda e à direita de H são iguais. De fato, pois, $\forall h \in H$, tem-se:

$$x \cdot h = h \cdot x, \quad \forall x \in G \text{ fixado}$$

Mas, se G não for abeliano, em geral o resultado acima não vale; ou seja,

$$Hx \neq xH \quad (\text{em geral}).$$

Por exemplo, considere o grupo S_3 das permutações de 3 elementos:

$$S_3 = \{ \text{id}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_a, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \}$$

considere $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Então, note que

$$a^2 = a \circ a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \text{id}.$$

$$\Rightarrow a^2 = \text{id} \Rightarrow a = a^{-1}.$$

Assim, temos que o conjunto $H := \{\text{id}, a\}$ é um subgrupo do grupo S_3 .

Tomemos $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$, e considere as classes laterais de H com b :

$$\bullet \underline{Hb} = H \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ \text{id} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, a \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \underline{\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}}$$

$$\bullet \underline{bH} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \text{id}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ a \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Note que, neste caso, vimos que

$$bH \neq Hb.$$

Isto nos levanta questões:

(1) Dado $H < G$, quando as classes laterais à esquerda e à direita são iguais? Ou seja, quando se tem $aH = Ha$, para $a \in G$?

(2) O produto de classes laterais à direita resulta em uma classe lateral à esquerda de H .
Ou seja:

$$(aH).(bH) = (ab)H?$$

mesma pergunta para classes laterais à esquerda.

No caso quando G é abeliano, (1) é verdadeira sempre; ou seja, $Ha = aH$.

o caso (2), quando G é abeliano,
também vale, pois:

$$\underbrace{(aH) \cdot (bH)}_{\text{assoc.}} = a \cdot \underbrace{(Hb)}_{\substack{Hb = bH \\ \text{por (1)}}} \cdot H = a \cdot \underbrace{(bH)}_{\text{assoc.}} \cdot H =$$
$$= (ab) \cdot H \cdot H = \underbrace{(ab) \cdot H}_{H \triangleleft G}.$$

$H \triangleleft G$ $\rightarrow$ logo, todos os elementos de H resultam em todos os elementos de H .

Mor, e quando G não for abeliano?

Isto se responde a partir do seguinte conceito:

Def. Sejam G um grupo e H um subgrupo de G .

Dizemos que H é normal em G , e escrevemos

$H \triangleleft G$; se, e somente se,

$$\forall h \in H; \forall x \in G \Rightarrow x h x^{-1} \in H,$$

Obs.: A expressão $x h x^{-1}$ chama-se uma conjugação.

PROPOSIÇÃO: Sejam G um grupo e $H < G$.

São equivalentes as seguintes afirmações:

(i) $H \triangleleft G$;

(ii) $\forall x \in G; \quad x H x^{-1} = H$;

(iii) $\forall x \in G; \quad x H = H x$;

(iv) $\forall a, b \in G; \quad (a H)(b H) = (ab) H$.

DEMONSTRA.:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Suponha que $H \triangleleft G$.

A mostrar: $\forall x \in G; \quad x H x^{-1} = H$.

Dado $x \in G$ qualquer.

AF.01: $x H x^{-1} \subset H$:

Dado $\alpha \in x H x^{-1}$, vamos mostrar que $\alpha \in H$.

De fato; como $\alpha \in x H x^{-1}$, então $\exists h \in H$

tal que

$$\alpha = x h x^{-1} \in H, \text{ pois } H \triangleleft G, \\ \text{por hipótese.}$$

Logo, $\alpha \in H$, que prova a AF.01.

AF02: $H \subset x H x^{-1}$:

Dado $h \in H$; precisamos mostrar que $h \in x H x^{-1}$.

Como $H \trianglelefteq G$, então:

$$\underbrace{h}_{\in H} = \underbrace{x x^{-1}}_e h \underbrace{x x^{-1}}_e = x (\underbrace{x^{-1} h x}_{\in H \trianglelefteq G}) \underbrace{x^{-1}}_e \in x H x^{-1}$$

Isso prova a AF-02.

Segun AF-01 e 02 segue (ii); ou seja, que $x H x^{-1} = H, \forall x \in G$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Suponha qto, $\forall x \in G$; $x H x^{-1} = H$.

A mostrar: $x H = H x$.

De fato, como $x H x^{-1} = H$, multiplicando à direita por x , vem:

$$(x H x^{-1}) x = H x \quad ; \text{ ou seja:}$$

$$x H (\underbrace{x^{-1} x}_e) = H x \quad ; \text{ i.e.;$$

$$x H = H x, \text{ provando (iii).}$$

(iii) $\Rightarrow$ (i''): Suponha que, $\forall x \in G$, $Hx = xH$.

A mostrar: $(a.H).(b.H) = (ab).H$; $\forall a, b \in G$.

De fato:

$$\begin{aligned} \underline{(a.H).(b.H)} &= a.(Hb).H = a.(bH).H = \\ &\quad \uparrow \text{Assoc.} \quad \uparrow \text{Hb = bH, por hipotese} \\ &= (a.b).H.H = (ab).H. \quad ; \text{ usando (i'')} \end{aligned}$$

$\uparrow$ Assoc. $\uparrow$ H < G

(i'') $\Rightarrow$ (i): Suponha que, $\forall a, b \in G$;

$$(a.H).(b.H) = (a.b).H. \quad (*)$$

A mostrar: $H \trianglelefteq G$.

Dados $x \in G$ e $h \in H$; então:

$$\begin{aligned} \underline{xhx^{-1}} &= (xhx^{-1})e = \underbrace{(x.h)}_{\in xH} \cdot \underbrace{(x^{-1}.e)}_{\substack{\in H \\ \in x^{-1}H}} \in \\ &= (x.H).(x^{-1}.H) = \underbrace{(x.x^{-1})}_e H = \underline{eH = H} \end{aligned}$$

$\uparrow$ por (*)

Ou seja; $x h x^{-1} \in H$; mostrando que
 $H \triangleleft G$.

□

EXEMPLOS DE SUBGRUPOS NORMAIS:

01) Se G for abeliano, então, $\forall H < G$; temos $H \triangleleft G$.

De fato; sendo G abeliano, então; $\forall x \in G$,
teremos $xH = Hx$.

(Ou seja, as classes laterais à esquerda e à
direita são iguais).

Esta proposição acima segue que $H \triangleleft G$.

02) $\{e\}$ e G são normais em G , trivialmente,
ou seja; $\{e\} \triangleleft G$; $G \triangleleft G$.

03) Dado G um grupo, vimos no estudo de
subgrupos o conceito de centro de G , definido por:
 $Z(G) = \{g \in G : gx = x.g : \forall x \in G\}$.

Vimos que $Z(G) \leq G$. [aula 04]

Vamos mostrar que $Z(G) \trianglelefteq G$.

Ou seja, dados $\alpha \in Z(G)$, e $x \in G$,
precisamos mostrar que

$$x \alpha x^{-1} \in Z(G).$$

De fato:

$$\underline{x \alpha x^{-1}} = (x \alpha) \cdot x^{-1} = (\alpha x) \cdot x^{-1} = \alpha \cdot (\underbrace{x \cdot x^{-1}}_e) = \alpha \in \underline{Z(G)}$$

Logo, $Z(G) \trianglelefteq G$.

~~~~~