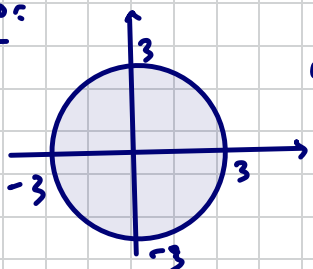


Outros exemplos de integração por coordenadas polares:

03) $\iint_{x^2+y^2 \leq 9} e^{-x^2-y^2} dx dy$.

Solução:



$0 \leq \rho \leq 3$

$x^2 + y^2 = \rho^2$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$dx dy = \rho d\rho d\theta$.

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 9} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\int_{\rho=0}^{\rho=3} e^{-\rho^2} \cdot \rho \cdot d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \cdot \left(\int_{\rho=0}^{\rho=3} e^{-\rho^2} (-2\rho d\rho) \right) = \theta \Big|_0^{2\pi} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot e^{-\rho^2} \Big|_0^3 =$$

$\int e^u du$
 $u = -\rho^2 \Rightarrow du = -2\rho d\rho$

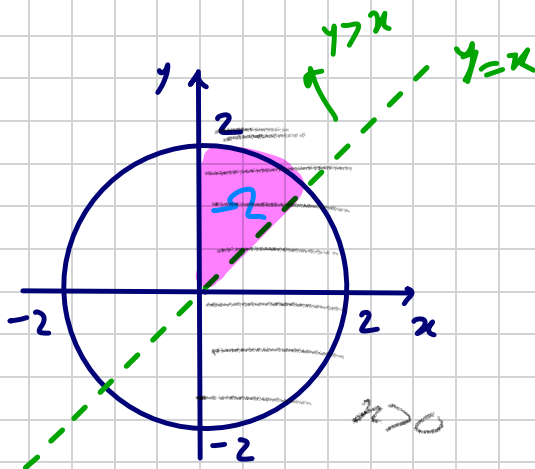
$$= (2\pi - 0) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot (e^{-(3)^2} - e^0) =$$

$$= -\pi \cdot (e^{-9} - 1) = \pi \cdot (1 - e^{-9})$$

04) Calcule $\iint_{\Omega} \cos(x^2+y^2) dx dy$, onde

$$\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4; 0 < x < y \}.$$

Solução:



$$0 \leq \rho \leq 2$$

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\iint_{\Omega} \underbrace{\cos(x^2+y^2)}_{\rho^2} \underbrace{dx dy}_{\rho d\rho d\theta} = \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{\rho=0}^{\rho=2} \cos(\rho^2) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \rho d\rho d\theta \quad \Rightarrow$$

$$\int \cos u du \Rightarrow u = \rho^2 \\ du = 2\rho d\rho$$

$$\Rightarrow \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} d\theta \cdot \frac{1}{2} \int_{\rho=0}^{\rho=2} \underbrace{\cos(\rho^2)}_u \cdot \underbrace{(2\rho d\rho)}_{du} =$$

$$= \theta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sin \rho^2 \right)^2 = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \right) \cdot (\sin 4 - \sin 0)$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 4 = \frac{\pi}{8} \cdot \sin 4$$

MUDANÇA GERAL DE COORDENADAS NO $\mathbb{R}^2$

Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em um conjunto J -mensurável Ω . Dependendo da região (e da função), o problema pode ser muito difícil ou até mesmo impossível de resolver.

Porém, efetuando uma mudança de coordenadas (de variável) adequada, o problema pode tornar-se mais simples ou solúvel.

Por exemplo:

$$\iint_{\Omega} (x-y)^2 \cdot \ln(x+y) \, dx \, dy ;$$

mesmo que Ω seja uma região simples, como até mesmo um retângulo, na forma apresentada, a resolução, se houver, será muito difícil.

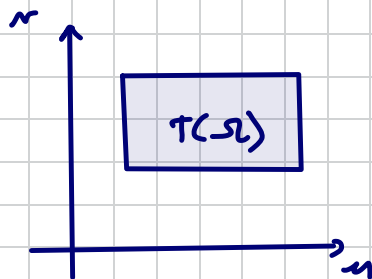
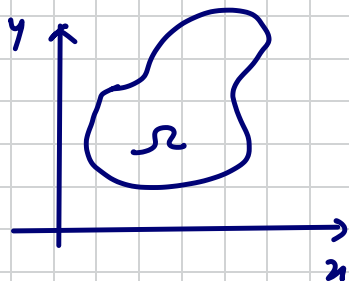
Nestas cores precisamos efetuar uma mudança de variáveis.

Deve-se tomar uma transformação

$T: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow T(\Omega) \subset \mathbb{R}^2$ injetiva e de classe C^1 .

(uma função é de classe C^1 , se suas derivadas parciais existirem e forem contínuas).

A transformação T manda a região Ω do plano xy para uma região $\Omega' = T(\Omega)$ do plano uv .

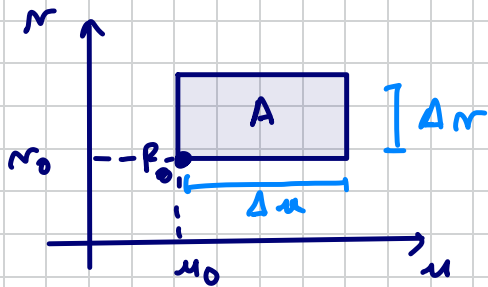


Neste caso, escreve-se

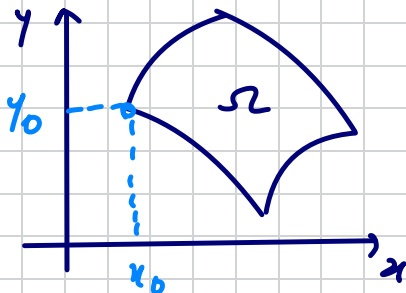
$$T(x, y) = (u, v), \text{ onde}$$

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

Seja A um retângulo no plano uv ;
e $T^{-1}: \Omega' \rightarrow \Omega$ bijetiva. (onde $\Omega' = T(\Omega)$)



$$\begin{matrix} \uparrow & & \downarrow \\ T & & T^{-1} \end{matrix}$$

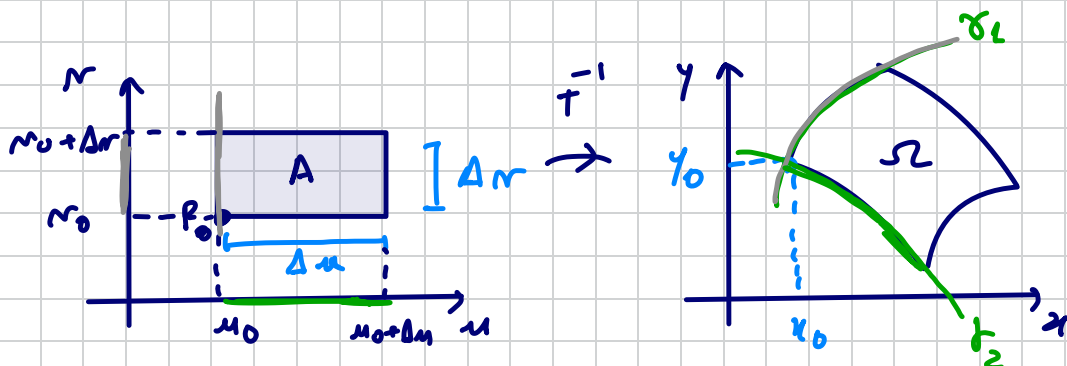


Seja A o bloco de dimensões Δu e Δv , e considere um ponto $P_0(u_0, v_0)$ no vértice inferior esquerdo seu correspondente no plano xy será (x_0, y_0)

Ou seja,

$$T(x_0, y_0) = (u_0, v_0)$$

Sejam γ_1 e γ_2 as curvas suportes aos lados que passam pelo ponto (x_0, y_0) , c.f. o esquema:



Então:

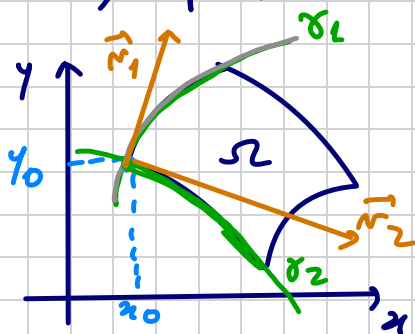
$$\gamma_1: [v_0, v_0 + \Delta v] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma_1(v) = (x(u_0, v), y(u_0, v))$$

$$\gamma_2: [u_0, u_0 + \Delta u] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma_2(u) = (x(u, v_0), y(u, v_0))$$

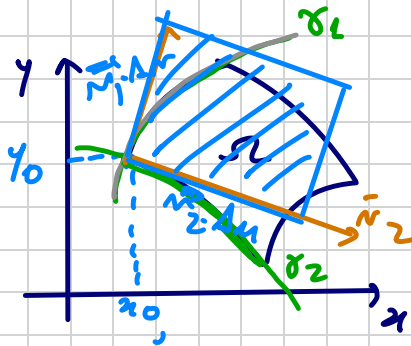
Os vetores $\vec{m}_1$ e $\vec{m}_2$, tangentes à γ_1 e γ_2 , no ponto (x_0, y_0) são, respectivamente, dados por:



$$\vec{n}_1 = \delta_1'(m_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial r}(u_0, m_0), \frac{\partial y}{\partial r}(u_0, m_0) \right)$$

$$\vec{n}_2 = \delta_2'(u_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, m_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, m_0) \right)$$

Redimensionando os vetores $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ pelos comprimentos Δr e Δu , vamos obter um paralelogramo:



A área desse paralelogramo formado pelos vetores $\vec{n}_1 \Delta r$ e $\vec{n}_2 \Delta u$ será dada por:

$$S = \| \vec{n}_2 \Delta u \times \vec{n}_1 \Delta r \| =$$

$$= \| \vec{n}_2 \times \vec{n}_1 \| \cdot \Delta u \cdot \Delta r, \text{ onde:}$$

$$\Delta u, \Delta r > 0$$

$$\vec{m}_2 \times \vec{m}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 \vec{i} + 0 \vec{j} + \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) \vec{k}$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) \vec{k}$$

Então:

$$\|\vec{m}_2 \times \vec{m}_1\| = \left\| \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) \vec{k} \right\|$$

$$= \left\| \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right\| =$$

$$= \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right|, \text{ onde}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = J(T)(u,v)$$

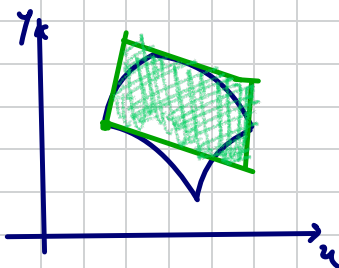
(MATRIZ JACOBIANA
DA TRANSFORMAÇÃO T)

Então: $\|\vec{m}_2 \times \vec{m}_1\| = |\det J(T)(u,v)|$

Assim, a área do paralelogramo deformado será:

$$\begin{aligned} S &= \|\vec{m}_2 \times \vec{m}_1\| \Delta u \Delta v \\ &= |\det J(T)(u,v)| \cdot \Delta u \cdot \Delta v \end{aligned}$$

Desse forma a área da região "deformada" se aproxima da área S .



Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ integrável e

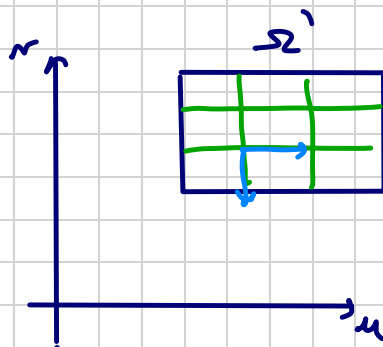
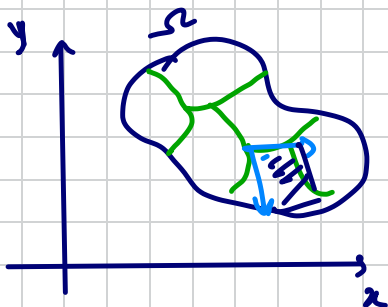
$$T: \Omega \rightarrow T(\Omega) \subset \mathbb{R}^2$$

transformação C^1 , e injetiva,

$$T(x, y) = (u, v); \quad \text{onde}$$

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

Seja D uma decomposição em Ω ; então $T(D)$ determina uma decomposição em Ω' .
onde A é um bloco em Ω' .



Analogamente:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i, j}^{m, n} f(x_i, y_j) \cdot \underbrace{\text{Vol}(A_{ij})}_{S_{ij}} =$$

$$= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i, j} f(x_i(u_i, v_j), y_j(u_i, v_j)) \cdot |\det J(T)(u_i, v_j)| \Delta u_i \Delta v_j$$

$$= \iint_{\Omega'} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |\det J(T)(u, v)| \cdot du dv$$

conclusão:

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{R}'} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |\det J(T)(u, v)| \cdot du dv$$

FÓRMULA DA MUDANÇA DE COORDENADAS DO SISTEMA xy PARA O SISTEMA uv .

EXEMPLOS:

01) SISTEMA DE COORDENADAS POLARES ESTUDADO NA AULA PASSADA:

$$T: \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

Então:

$$\det(J(T)(\rho, \theta)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$= \rho \cdot \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta$$

$$= \rho (\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_{=1}) = \rho.$$

Assim:

$$\underbrace{\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy}_{\Omega' = \Omega} = \iint f(\overbrace{x(p, \theta)}^{p \cos \theta}, \overbrace{y(p, \theta)}^{p \sin \theta}) \cdot \underbrace{|\det j(r)(p, \theta)|}_{|p| = p} dp d\theta$$

POIS EM COORDENADAS
POLARES A REGIÃO
NÃO SE ALTERA

$$= \iint_{\Omega} f(p \cos \theta, p \sin \theta) p \cdot dp d\theta.$$

Na próxima aula veremos outros exemplos.