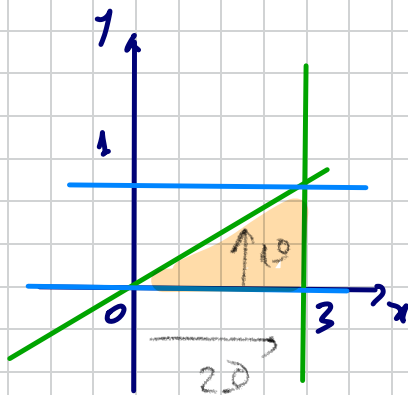


05) Calcule $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$.

Solução:

$$\int_{y=0}^{y=1} \int_{x=3y}^{x=3} e^{x^2} dx dy =$$



$$= \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=0}^{y=\frac{1}{3}x} e^{x^2} dy dx = \int_{x=0}^{x=3} e^{x^2} \int_{y=0}^{y=\frac{1}{3}x} dy dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=3} e^{x^2} \cdot y \Big|_{y=0}^{y=\frac{1}{3}x} dx = \int_0^3 e^{x^2} \cdot \frac{1}{3} x \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \int_0^3 e^{u^2} \cdot 2u du =$$

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$$

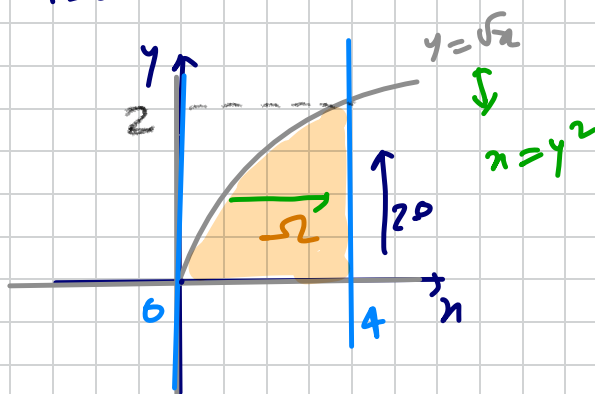
$$= \frac{1}{6} e^{x^2} \Big|_0^3 = \frac{1}{6} \cdot (e^{(3)^2} - e^0) = \frac{e^9 - 1}{6}$$

06) Esboce a região de integração e faça a mudança de ordem para

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx.$$

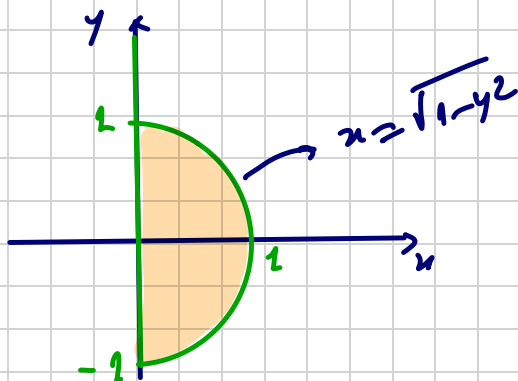
Solução:

$$\int_{x=0}^{x=4} \int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} f(x, y) dy dx = \int_{y=0}^{y=2} \int_{x=y^2}^{x=4} f(x, y) dx dy$$



07) Calcule $\iint_{\Omega} xy^2 dA$, onde Ω é a
 região limitada por $x=0$ e $x=\sqrt{1-y^2}$.

Solução:



$$\downarrow$$

$$x^2 = 1 - y^2$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Aísim, pelo esquema acima, temos:

$$\iint_{\Omega} xy^2 dA = \int_{y=-1}^{y=1} \int_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} xy^2 dx dy =$$

$$= \int_{y=-1}^{y=1} y^2 \left(\int_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} x dx \right) dy = \int_{y=-1}^{y=1} y^2 \cdot \frac{x^2}{2} \bigg|_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} dy =$$

$$y=1$$

$$= \frac{1}{2} \int_{y=-1}^1 y^2 \left((\sqrt{1-y^2})^2 - 0 \right) dy =$$

$$y=-1$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 y^2 (1-y^2) dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (y^2 - y^4) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right) \Big|_{-1}^1 =$$

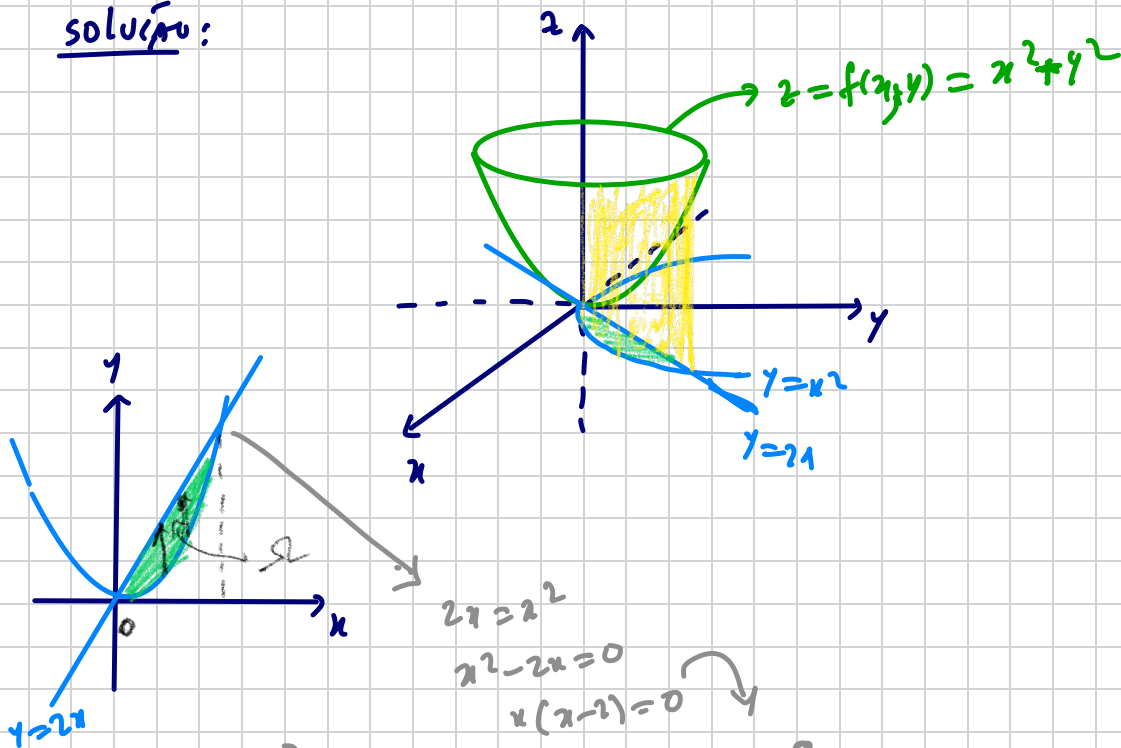
$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{5-3}{15} = \frac{2}{15}$$



08) Determine o volume do sólido que está abaixo do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e acima da região Ω do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pelo parábola $y = x^2$.

solução:



$$\begin{aligned}
 V &= \iint_{\Omega} f(x, y) dA = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=x^2}^{y=2x} (x^2 + y^2) dy dx \\
 &= \int_{x=0}^{x=2} \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \bigg|_{y=x^2}^{y=2x} dx =
 \end{aligned}$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} \left(x^2 \cdot 2x + \frac{(2x)^3}{3} - \left[x^2 \cdot x^2 + \frac{(x^2)^3}{3} \right] \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(2x^3 + \frac{8x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{14x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx =$$

$$= \left(-\frac{14}{3} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right) \bigg|_0^2 =$$

$$= \left(+ \frac{7x^4}{6} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right) \bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{7 \cdot 2 \cdot 2^3}{2 \cdot 3} - \frac{32}{5} - \frac{128}{21} - 0 =$$

$$= \frac{56}{3} - \frac{32}{5} - \frac{128}{21} = \frac{1960 - 672 - 640}{105} = \frac{648}{105} \text{ m}^3$$

$$= \frac{216}{35} \text{ m.r}$$

UNIDADES DE VOLUME.

ÁREAS DE REGIÕES DO PLANO POR INTEGRAIS DUPLAS:

Assumindo $z = f(x, y) \geq 0$, em uma região R do plano xy , temos que $\iint_R f(x, y) dA$ nos fornece o volume V do sólido S abaixo do gráfico de f e acima da região R (como no exercício feito acima).

Considere então $f(x, y) = 1$. ($1 \leq z \leq 1$)

Neste caso, sobre a região R do plano xy , o sólido obtido será um "prisma" sendo a base a região R do plano xy . O seu volume será:

$$V = A_b \cdot h \quad ; \quad \text{onde} \quad A_b \text{ é a área}$$

La base e $h = 1$. Logo:

$$V = A_b \cdot h = A_b,$$

ou seja, o volume, numericamente, será igual à área. No nosso caso, temos:

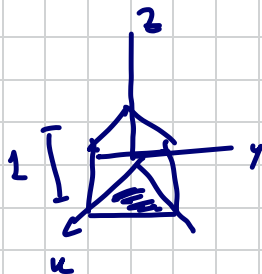
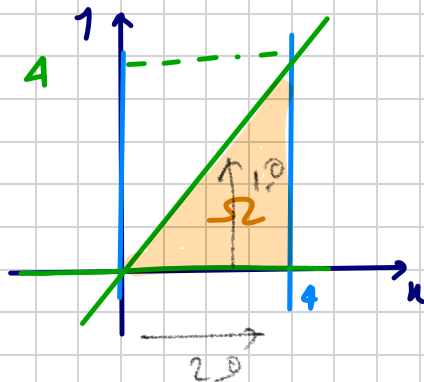
$$V = \iint_{\Omega} f(x, y) dA = \iint_{\Omega} 1 \cdot dA = \iint_{\Omega} dA;$$

onde $dA = dx dy$ ou $dA = dy dx$, chamado de elemento de área.

Vejam os um exemplo:

01) Use integrais duplas para obter a área da região compreendida pelas retas $x=0$, $y=0$, $x=4$ e $y=x$.

Solução:



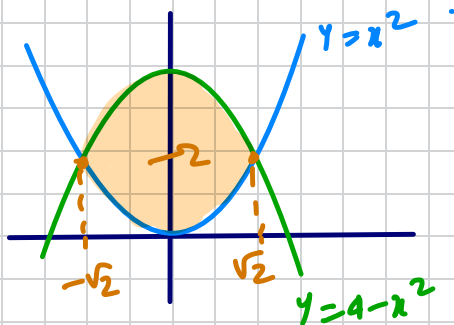
$$A = \iint_R dA = \int_{x=0}^{x=4} \int_{y=0}^{y=x} dy dx = \int_{x=0}^{x=4} y \Big|_{y=0}^{y=x} dx =$$

$$= \int_0^4 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = \frac{(4)^2}{2} - 0 = 8 \text{ u.a.}$$

UNIDADES DE
ÁREA.

02) Obtenha, por integrais duplas, a área da região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4 - x^2$.

Solução:



$$\begin{aligned} x^2 &= 4 - x^2 \\ 2x^2 &= 4 \\ x^2 &= 2 \\ x &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$A = \iint_R dA = \int_{x=-\sqrt{2}}^{x=\sqrt{2}} \int_{y=x^2}^{y=4-x^2} dy dx =$$

$$= 2 \cdot \int_{x=0}^{x=\sqrt{2}} \int_{y=x^2}^{y=4-x^2} dy dx =$$

DEVIDO À
SIMETRIA DA
REGIÃO Ω .

$$= 2 \cdot \int_{x=0}^{x=\sqrt{2}} \left. y \right|_{y=x^2}^{y=4-x^2} dx = 2 \int_{x=0}^{x=\sqrt{2}} (4-x^2-x^2) dx =$$

$$= 2 \int_0^{\sqrt{2}} (4-2x^2) dx = 2 \left(4x - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= 2 \cdot \left[4\sqrt{2} - \frac{2(\sqrt{2})^3}{3} - 0 \right] =$$

$$= 2 \left[4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \right] = 8\sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \underline{\underline{\frac{16\sqrt{2}}{3} \text{ u.a.}}}$$