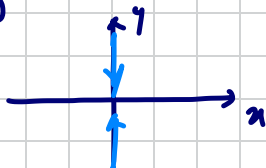


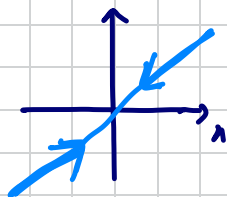
Se aula vimos limites por caminhos. Vejamos outros exemplos.

$$02) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

$$\bullet \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} \frac{0}{0 + y^2} = 0 //$$



$$\bullet \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=y}} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=y}} \frac{y^2}{y^2 + y^2} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=y}} \frac{y^2}{2y^2} = \frac{1}{2} //$$



Como por caminhos diferentes obtemos limites diferentes, concluímos que $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$.

$$03) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

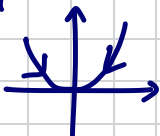
$$\bullet \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{0}{\sqrt{x^2}} = 0 //$$

$$\bullet \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{x^2 x^2}{\sqrt{x^2 + x^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{x^4}{\sqrt{2} x^2} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{x^2}{\sqrt{2} \cdot |x|} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x, x>0}} \frac{x^2}{\sqrt{2} x} = 0 \\ \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x, x<0}} \frac{x^2}{\sqrt{2} \cdot (-x)} = 0 \end{cases} > 0$$

$$\bullet \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^2}} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^2}} \frac{x^2 (x^2)^2}{\sqrt{x^2 + (x^2)^2}} =$$



$$= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^2}} \frac{x^6}{\sqrt{x^2+x^4}} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^2}} \frac{x^6}{\sqrt{x^2(1+x^2)}} =$$

$$= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^2}} \frac{x^6}{|x| \cdot \sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^2, x \geq 0}} \frac{\cancel{x^6}^5}{\cancel{x}^1 \sqrt{1+x^2}} = 0 \\ \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^2, x < 0}} \frac{\cancel{x^6}^5}{-\cancel{x}^1 \sqrt{1+x^2}} = 0 \end{cases} > = 0$$

Ou seja, por três caminhos distintos o limite resultou no mesmo valor (no caso, em zero)

Isso fornece apenas a conjectura de que o limite existe e seja zero. Ou seja, mostramos a seguinte afirmação:

$$\underline{\text{Afirm.}} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 :$$

Dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $\delta > 0$, tal que $\forall x \in \mathbb{R}^2$: $0 < d((x,y), (0,0)) < \delta$, implique em

$$|f(x, y) - 0| < \varepsilon.$$

Next case, $d((x, y); (0, 0)) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad (*)$$

Analicando $|f(x, y) - 0|$:

$$\underline{|f(x, y) - 0|} = |f(x, y)| = \left| \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| =$$

$$= \frac{|x|^2 \cdot |y|^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Note que:

- $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$
- $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| &= \frac{|x|^2 \cdot |y|^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{(\sqrt{x^2 + y^2})^2 \cdot (\sqrt{x^2 + y^2})^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \cdot (\sqrt{x^2 + y^2})^2 \end{aligned}$$

$$= \underbrace{(\sqrt{x^2+y^2})^3}_{< \delta, \text{ por } (*)} < \delta^3 := \varepsilon$$

Outra coisa, basta tomar $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$.

Para provar o limite. Ou seja;

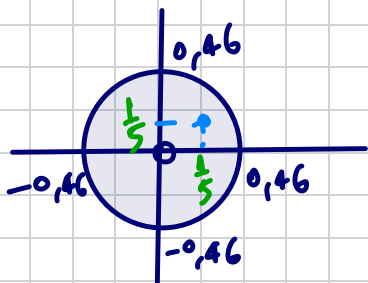
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

ILUSTRANDO: $\forall \varepsilon > 0$. Tome, por ex. $\varepsilon = 0,1 > 0$.

$$\text{Então devemos ter } \delta = \sqrt[3]{0,1} \approx 0,46 > 0$$

Significa que $\forall (x,y) \in B_{0,46}(0,0)$; e'

garantido que $|f(x,y) - 0| < 0,1$.



$$(x,y) = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) \in B_{0,46}(0,0) \quad /$$

e' tal que

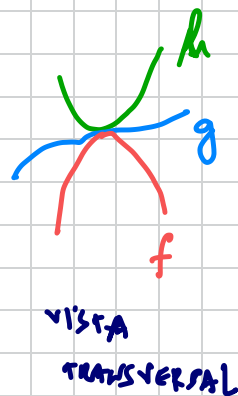
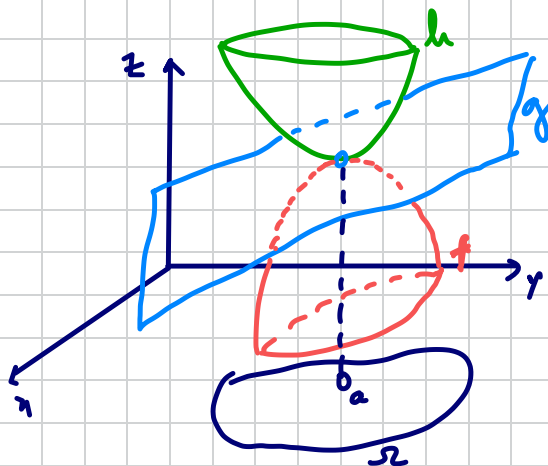
$$\left| f\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) \right| = \left| \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2}} \right| =$$

$$= \frac{\frac{1}{625}}{\sqrt{\frac{2}{25}}} = \frac{1}{625} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{1}{125\sqrt{2}} \approx 0,0057 < 0,1.$$

TEOREMA DO SANDUICHE Sejam $f, g, h: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,
com $a \in \mathbb{R}^2$ um ponto de acumulação do
conj. Ω . Se, $\forall x \in \Omega$: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, e

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l,$$

$$\text{então } \exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l.$$



DEMONSTR. DO TEOREMA: Sejam $f, g, h: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
nas hipóteses do teorema. (a ponto de acumula-
ção da conj. Ω)

Dado $\varepsilon > 0$.

Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, então, $\exists \delta_1 > 0$, tal que

$$\forall x \in \Omega: x \in B(a) \setminus \{a\} \xrightarrow{\delta_1} \underline{|f(x) - l| < \varepsilon. (*)}$$

Como $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$, então, $\exists \delta_2 > 0$, tal que,

$$\forall x \in \Omega: x \in B(a) \setminus \{a\} \xrightarrow{\delta_2} \underline{|h(x) - l| < \varepsilon. (**)}$$

Seja $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Assim,

$\forall x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$, valem $(*)$ e $(**)$.

Ou seja,

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$



$$\underline{-\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon}$$

(II)

$$|h(x) - l| < \varepsilon$$



$$\underline{-\varepsilon < h(x) - l < \varepsilon.}$$

(I)

Como por hipótese

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$

subtraindo $l \in \mathbb{R}$, temos obter:

$$\underbrace{-\varepsilon}_{\uparrow \text{ por } (\mathbb{R})} < f(x) - l \leq \underbrace{g(x) - l}_{\text{wavy line}} \leq h(x) - l < \underbrace{\varepsilon}_{\uparrow \text{ por } (\mathbb{R})}$$

Ou seja;

$$\underbrace{-\varepsilon < g(x) - l < \varepsilon}_{\text{circled}}, \text{ sempre que } x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}, \text{ i.e.;} \rightarrow |g(x) - l| < \varepsilon.$$

$\forall \varepsilon > 0$, encontramos $\delta > 0$ tal que,

$$\forall x \in \Omega: \quad x \in B_\delta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow |g(x) - l| < \varepsilon,$$

$$\text{i.e.,} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$$

□

Sejamos um exemplo de aplicação:

Ex.1 L15RA3

7. Sabendo que

$$1 - \frac{x^2 y^2}{3} < \frac{\arctan xy}{xy} < 1,$$

o que pode-se dizer sobre

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\arctan xy}{xy} ? \text{ Justifique.}$$

solução:

Note que:

$$\bullet \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 1 - \frac{x^2 y^2}{3} = 1.$$

$$\bullet \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 1 = 1$$

Então, pelo T. do Sanduíche segue que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\arctan xy}{xy} = 1.$$

□

L3

3. Calcule, se existir, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cos \frac{1}{y}$, lembrando que $|\cos \alpha| < 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

solução: Note que, em particular,

$$|\cos \frac{1}{y}| < 1.$$

$$-1 \leq \cos \frac{1}{y} \leq 1. \quad (*)$$

Seja $x \geq 0$. Então multiplicando (*)
por x , obtemos:

$$-x \leq x \cdot \cos \frac{1}{y} \leq x.$$

$\downarrow$ $\downarrow$

0 0

$(x,y) \rightarrow (0,0)$ $(x,y) \rightarrow (0,0)$

T. Sanduíche

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cdot \cos \frac{1}{y} = 0.$$

Tome $x < 0$. Então, multiplicando (*) por x ,
tem:

$$-x \geq x \cos \frac{1}{y} \geq x$$

$$\Rightarrow x \leq x \cdot \cos \frac{1}{y} \leq -x$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $0 \quad (x,y) \rightarrow (0,0) \quad \downarrow \text{Sanduíche} \quad (x,y) \rightarrow (0,0) \quad 0$

$$x \cdot \cos \frac{1}{y} \rightarrow 0$$

$(x,y) \rightarrow (0,0)$

o teorema do sanduíche ajuda também no
cálculo de limites pela def. como segue:

Ex: Calcule $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Solução: Basta observar que:

$$0 \leq |f(x, y)| = \left| \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{x^2 \cdot |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Como $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, então:

$$0 \leq |f(x, y)| = \frac{x^2 |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 \cdot \cancel{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\cancel{\sqrt{x^2 + y^2}}}$$

Seu seja:

$$0 \leq |f(x, y)| \leq x^2$$

$\swarrow$ $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ $\searrow$ $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

$\downarrow$ f. Sanduíche

$$|f(x, y)| \rightarrow 0$$

$(x, y) \rightarrow (0, 0)$

$$\Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0.$$



Voltando para as funções vetoriais

$$\vec{f}: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t))$$

Seja $t_0 \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de $[a, b]$.

Então,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t), \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} f_m(t) \right)$$

Outra coisa, o limite de uma função vetorial resume-se ao cálculo do limite de cada função coordenada.

Ex. Calcule

$$\lim_{t \rightarrow 1} \left(\underbrace{\frac{t^3 - t}{t^2 + 2t - 3}}_{f_1}, \underbrace{\frac{\sqrt{t+3} - 2}{t^2 - t}}_{f_2} \right)$$

Solução:

$$\bullet \lim_{t \rightarrow 1} f_1(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 - t}{t^2 + 2t - 3} =$$

$$\frac{t^2 + 2t - 3}{-t^2 + t} \quad \frac{t-1}{t+3} \Rightarrow t^2 + 2t - 3 = (t-1)(t+3)$$
$$\begin{array}{r} t^2 + 2t - 3 \\ -t^2 + t \\ \hline 3t - 3 \\ -3t + 3 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t(t^2 - 1)}{(t-1)(t+3)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t(t+1)\cancel{(t-1)}}{\cancel{(t-1)}(t+3)}$$
$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t(t+1)}{t+3} = \frac{1 \cdot (1+1)}{1+3} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow 1} f_2(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t+3} - 2}{t^2 - t} \times \frac{\sqrt{t+3} + 2}{\sqrt{t+3} + 2} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{t+3})^2 - (2)^2}{t(t-1) \cdot (\sqrt{t+3} + 2)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t+3-4}{t(t-1)(\sqrt{t+3}+2)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\cancel{t-1}}{t \cdot \cancel{(t-1)} \cdot (\sqrt{t+3}+2)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t(\sqrt{t+3}+2)} = \frac{1}{1(\sqrt{4}+2)} = \frac{1}{4} //
 \end{aligned}$$

Portanto, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 1} \vec{f}(t) &= \left(\lim_{t \rightarrow 1} f_1(t), \lim_{t \rightarrow 1} f_2(t) \right) \\
 &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)
 \end{aligned}$$

