

AULA DE EXERCÍCIOSLISTA 01.

11. Mostre que $\mathbb{Q} \setminus \{0\} \times \mathbb{Q}$ munido da operação $\star$ definida por

$$(a, b) \star (c, d) = (ac, bc + d)$$

é um grupo.

Dados $\alpha = (a, b)$; $\beta = (x, y)$ e $\gamma = (p, q)$.

Então, temos:

(i) ASSOCIATIVIDADE: $\alpha \star (\beta \star \gamma) \stackrel{?}{=} (\alpha \star \beta) \star \gamma$

$$\begin{aligned}\alpha \star (\beta \star \gamma) &= (a, b) \star ((x, y) \star (p, q)) = \\ &= (a, b) \star (x \cdot p, yp + q) = (a \cdot (xp), b \cdot (xp) + yp + q) \\ &= \underline{(a \cdot xp, bxp + yp + q)} \quad (1)\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}(\alpha \star \beta) \star \gamma &= ((a, b) \star (x, y)) \star (p, q) = \\ &= (a \cdot x, b \cdot x + y) \star (p, q) = \\ &= ((ax) \cdot p, \underbrace{(bx + y)} \cdot p + q)\end{aligned}$$

$$= (axp, bxp + yp + q) \quad (II)$$

Então, de (I) e (II) segue a associatividade.

(ii) existência do neutro:

Precisamos encontrar $\theta = (u, r) \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \times \mathbb{Q}$,
tal que $\alpha * \theta = \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \times \mathbb{Q}$.

Seja $\alpha = (a, b)$. Assim:

$$\alpha * \theta = \alpha$$

$$(a, b) * (u, r) = (a, b)$$

$$(a.u, b.u + r) = (a, b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a.u = a \\ b.u + r = b \end{cases}$$

Como $a \neq 0$, pois $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, então, $a.u = a$
pode ser simplificado:

$$\cancel{a}.u = \cancel{a}$$

$$\boxed{u = 1}$$

Da segunda igualdade, sendo sabido que $u = 1$,
obtemos:

$$b \cdot 1 + r = b.$$

$$\cancel{b + r = b} \Rightarrow \boxed{r = 0}$$

Logo $\theta = (u, v) \Rightarrow \theta = (1, 0)$ e' o
neutro de $*$.

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \times \mathbb{Q}$, devemos encontrar
 $\beta \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \times \mathbb{Q}$ tal que

$$\alpha * \beta = (1, 0)$$

$\nearrow$ neutro definido
antes.

Seja $\alpha = (a, b)$ e $\beta = (x, y)$.

Agora, precisamos determinar x e y .

$$\alpha * \beta = (1, 0)$$

$$(a, b) * (x, y) = (1, 0)$$

$$(a \cdot x, b \cdot x + y) = (1, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot x = 1 & \xrightarrow{a \neq 0} x = \frac{1}{a} \\ b \cdot x + y = 0 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow b \cdot \frac{1}{a} + y = 0 \Rightarrow y = -\frac{b}{a}$$

Analogamente, o inverso de $\alpha = (a, b)$ será

$$\beta = \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$$

Analogamente, de $(i), (ix)$ e (ixi) segue que

$(\mathbb{Q} \setminus \{0\} \times \mathbb{Q}, *)$ é um grupo.

Lista 01

4. Dizemos que uma operação $*$ em um conjunto não vazio A é *totalmente não associativa* se

$$(x * y) * z \neq x * (y * z), \forall x, y, z \in A.$$

Mostre que se $*$ é totalmente não associativa, então $*$ não é comutativa.

Suponha $*$ totalmente não associativa; em $A \neq \emptyset$.

Necessamos mostrar que $x * y \neq y * x$.

Sei absurdo, suponha que vale a comutatividade,
ou seja, que $x * y = y * x, \forall x, y \in A$. (I)

Como $\forall x, y, z \in A$;

$$x * (y * z) \neq (x * y) * z;$$

em particular, tomando $x = y = z = \alpha$, teremos:

$$\alpha * (\alpha * \alpha) \neq (\alpha * \alpha) * \alpha \quad (\text{II}).$$

escrevendo $\alpha * \alpha = \beta$, então; de (II) vem:

$$\alpha * \beta \neq \beta * \alpha;$$

em acordo com (I).

Portanto, $*$ também é não-comutativa.

66.

6. Considere $F = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ o conjunto de todas as funções reais de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e $\circ$ a operação de composição entre funções em F . Mostre que $f(x) = 3x - 1 \in F$ é simetrizável mediante a operação $\circ$ em F .

↙
inverso.

$(F, \circ)$

$$f(x) = 3x - 1 \in F. \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

mostre que f é simetrizável mediante $\circ$ em F .

① simétrico de f em F , com a composição é uma função $g \in F$ tal que

$$f \circ g = \underline{\text{id.}}$$

↓
neutro da composição de funções:

$$\text{id}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{id}(x) = x.$$

Qual a função g na qual $f \circ g = \text{id}$ (e $g \circ f = \text{id}$)

Na verdade $g = f^{-1}$ (a inversa de f).

$$y = f(x) = 3x - 1.$$

$$\Rightarrow y + 1 = 3x$$

$$\Rightarrow x = \frac{y+1}{3}$$

$$f^{-1}(y)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+1}{3}.$$

g

De fato:

$$\begin{aligned}\underline{(g \circ f)(x)} &= g(f(x)) = g\left(\frac{3x-1}{4}\right) = \\ &= \frac{(3x-1)+1}{3} = \frac{3x}{3} = \underline{x = id.}\end{aligned}$$

Do mesmo modo;

$$\begin{aligned}\underline{(f \circ g)(y)} &= f(g(y)) = f\left(\frac{y+1}{3}\right) = \\ &= 3 \cdot \left(\frac{y+1}{3}\right) - 1 = y+1-1 = \underline{y = id.}\end{aligned}$$

17. Seja G um grupo. Mostre que se $(ab)^2 = a^2b^2$, para quaisquer $a, b \in G$, então G é um grupo abeliano.

$(G, \cdot)$. Suponha que

$$(ab)^2 = a^2b^2, \quad \forall a, b \in G.$$

A mostrar: G é abeliano.

Observe, $\forall a, b \in G$, precisamos mostrar que

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Como, em geral:

$$(a \cdot b)^2 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b), \quad \text{então:}$$

$$ab \cdot ab = (a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$$

$$\Rightarrow a \cdot b \cdot a \cdot b = a \cdot a \cdot b \cdot b \quad (*)$$

Sejam a^{-1} e b^{-1} os respectivos inversos de a e b .

Multiplicando (*) à esquerda por a^{-1} vem:

$$a^{-1} \cdot (ab \cdot ab) = a^{-1} \cdot (a \cdot a \cdot b \cdot b)$$

Por associatividade:

$$(\underbrace{a^{-1} \cdot a}_e) \cdot b \cdot ab = (\underbrace{a^{-1} \cdot a}_e) \cdot a \cdot b \cdot b$$

$$\Rightarrow b \cdot a \cdot b = a \cdot b \cdot b$$

Multiplicando à direita por b^{-1} , vem:

$$(b \cdot a \cdot b) \cdot b^{-1} = (a \cdot b \cdot b) \cdot b^{-1}$$

Por associatividade:

$$b \cdot a \cdot (\underbrace{b \cdot b^{-1}}_e) = (a \cdot b) \cdot (\underbrace{b \cdot b^{-1}}_e)$$

$$\Rightarrow b \cdot a = a \cdot b ; \text{ ou seja, } (G, \cdot) \text{ é abeliano.}$$

L1:

19. Suponha que em um grupo G todo elemento é seu próprio inverso. Mostre que G é abeliano.

Seja G um grupo tal que, $\forall g \in G$;

$$g \cdot g = e, \text{ onde } e \text{ é o neutro,}$$

ou seja, $g = g^{-1}, \forall g \in G.$

A mostrar: G é abeliano; ou seja;

$$a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in G.$$

Note que:

$$(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = e$$

Multiplicando à direita por b^{-1} (inverso de b),

vem:

$$(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot b^{-1} = \underline{e \cdot b^{-1}}$$

$$(a \cdot b) \cdot a \cdot \underbrace{(b \cdot b^{-1})}_e = b^{-1}$$

$$(a \cdot b) \cdot a = \underbrace{b^{-1}}$$

$\Rightarrow b.$ pois, c.f. o enunciado, o inverso de um elemento de G é ele próprio.

$$\Rightarrow (a \cdot b) \cdot a = b$$

multiplicando à direita por a^{-1} , vem:

$$(a \cdot b) \cdot \underbrace{a \cdot a^{-1}}_{=e} = b \cdot a^{-1}$$

$$a \cdot b = b \cdot \underbrace{a^{-1}}_{=a^{-1}}$$

$$\Rightarrow a \cdot b = b \cdot a,$$

$\forall a, b \in G.$, ou seja, G é abeliana.

