

**Universidade Federal de Pelotas**  
**Curso de Licenciatura em Matemática**  
**Disciplina de Álgebra A**  
**Prof. Dr. Maurício Zahn**

**Lista 03 - Grupos cíclicos, classes laterais e o Teorema de Lagrange**

1. Considere no conjunto  $\mathbb{C}$  dos números complexos as raízes da equação  $z^{12} - 1 = 0$ .
  - (a) Mostre que o conjunto  $G$  formado pelas raízes da equação acima, com o produto usual em  $\mathbb{C}$  é um grupo.
  - (b) Faça uma representação geométrica no plano de Argand-Gauss das raízes décimas segundas de 1. Em seguida, na representação feita, destaque um subconjunto  $H$  de  $G$  que possua o vértice correspondente ao afixo  $z = 1$  e outros dois vértices de forma a obter um triângulo equilátero. Mostre que  $H < G$ .
  - (c) Obtenha um subgrupo  $K$  de  $G$  de ordem 6. Identifique-o na representação.
  - (d) O grupo  $G$  é cíclico? Justifique.
  - (e) Obtenha todas as classes laterais à esquerda e à direita de  $H$ .
  - (f) Encontre as ordens das primeiras quatro raízes da equação em (a).
2. Seja  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m > 1$ . Indicando por  $G_m$  o conjunto das raízes  $m$ -ésimas complexas de 1, mostre que  $(G_m, \cdot)$  é um subgrupo cíclico de  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ , onde  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .
3. Determine todas as classes laterais de  $H = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$  no grupo aditivo  $\mathbb{Z}_{12}$ .
4. Sejam  $G = (\mathbb{Z}_{12}, +)$  e  $H = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$  um subgrupo de  $G$ . Construa a tábua do grupo quociente  $(G/H, +)$ , identifique seu elemento neutro e os inversos aditivos de  $\bar{1} + H$  e  $\bar{2} + H$ .
5. Se  $ghg^{-1} \in H$ , para todo  $g \in G$  e  $h \in H$ ,  $H < G$ , mostre que  $gH = Hg$ ,  $\forall g \in G$ , i.e., as classes laterais à esquerda e à direita, neste caso, são idênticas.
6. Seja  $S_3$  o grupo das permutações de  $A = \{1, 2, 3\}$ . Determine todas as classes laterais à esquerda e à direita de  $H = \{id, \beta\}$ , onde

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Vimos na teoria a definição de ordem de um grupo. Definimos também a *ordem de um elemento de um grupo*  $G$ : se  $\alpha$  é um elemento de um grupo  $G$ , a ordem de  $\alpha$  é a ordem do subgrupo gerado por  $\alpha$  e é denotada por  $|\langle \alpha \rangle|$  ou  $O(\alpha)$ .  
Seja  $G$  um grupo e  $\alpha \in G$ ,  $\alpha \neq e$ .
  - (a) Mostre que  $\alpha$  tem ordem 2 se, e somente se,  $\alpha = \alpha^{-1}$ .
  - (b) Mostre que se  $O(\alpha) = m \cdot n$ , então  $O(\alpha^m) = n$ .
8. Seja  $G$  um grupo e  $a \in G$  tal que  $O(a) = m$ . Mostre que se  $a^t = e$ , então  $m|t$ .
9. Seja  $G = \langle a \rangle$  o grupo cíclico gerado por  $a$  e suponha que  $O(a) = m$ . Mostre que  $a^n$  gera  $G$  se, e somente se,  $\text{mdc}(m, n) = 1$ .

10. Seja  $G$  um grupo multiplicativo tal que  $|G| = 100$ . Mostre que a equação  $x^7 = 1$  tem somente uma solução  $x \in G$ .
11. Seja  $G$  um grupo abeliano e considere o subconjunto  $T(G) := \{\alpha \in G : O(\alpha) < \infty\}$ . Mostre que  $T(G) < G$ .  
**Obs.:**  $T(G)$  é chamado de subgrupo *torção* de  $G$ .
12. Seja  $G$  um grupo de ordem  $p^n$ , onde  $p$  é primo e  $n > 1$ . Mostre que a ordem de um elemento qualquer de  $G$  é uma potência de  $p$ .
13. Em  $S_3$ , procure as ordens de todos os seus elementos e de todos os subgrupos. Verifique o Teorema de Lagrange.
14. Determine as classes laterais de  $H = \langle \bar{4} \rangle$  em  $(\mathbb{Z}_8, +)$  e o conjunto quociente  $\mathbb{Z}_8/H$ .