

Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Álgebra A
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 02 - Subgrupos

1. Suponha que em um grupo G todo elemento é seu próprio inverso. Mostre que G é abeliano.
2. Determine todos os subgrupos de $(\mathbb{Z}_{12}, +)$.
3. Sejam G um grupo e $K \subset H \subset G$, não vazios, tais que $H < G$ e $K < H$. Mostre que $K < G$.
4. Seja G um grupo qualquer. Defina o *centro* de G por

$$Z(G) := \{x \in G : gx = xg, \forall g \in G\}.$$

- (a) Mostre que $Z(G) < G$.
 - (b) Mostre que G é abeliano se, e somente se, $Z(G) = G$.
5. Sejam G um grupo e a um elemento em G . Defina $f_a : G \rightarrow G$ por $f_a(x) = axa^{-1}$. Mostre que o conjunto de todas as aplicações f_a , com $a \in G$, é um grupo com a composição de funções.
 6. Sejam G um grupo e $H < G$. Seja $x \in G$. Considere o conjunto xHx^{-1} o subconjunto de G formado por todos os elementos xhx^{-1} com $y \in H$. Mostre que $xHx^{-1} < G$.
 7. Sejam H e K dois subgrupos de um grupo G .
 - (a) Mostre que $H \cap K$ é um subgrupo de G .
 - (b) Mais geralmente, sendo $(H_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de subgrupos de G , mostre que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$ é um subgrupo de G .
 8. Sejam G um grupo e $(H_i)_{i \in I}$ uma família de subgrupos de G . Suponha que $\forall i, j \in I$, $H_i \subset H_j$ ou $H_j \subset H_i$. Mostre que $\bigcup_{i \in I} H_i < G$.
Se tirarmos a hipótese $\forall i, j \in I$, $H_i \subset H_j$ ou $H_j \subset H_i$, a tese continua válida? Justifique.

9. Sejam H e K dois subgrupos de um grupo G . Defina o conjunto HK por

$$HK = \{ab : a \in H \text{ e } b \in K\}.$$

Mostre que $HK < G \Leftrightarrow HK = KH$.

10. Seja G um grupo e $H < G$. Defina o conjunto $N(H)$ por

$$N(H) := \{g \in G : gHg^{-1} = H\}.$$

O conjunto $N(H)$ é chamado de *normalizador* de H em G . Mostre que $N(H) \neq \emptyset$ e prove que $N(H) < G$.

11. Considere o grupo $(\mathbb{Z}_6, +)$.

- (a) Calcule $\langle \bar{1} \rangle$, $\langle \bar{2} \rangle$ e $\langle \bar{3} \rangle$.
- (b) Quais os elementos de $\mathbb{Z}_6$ são geradores de $\mathbb{Z}_6$? $\mathbb{Z}_6$ é cíclico? Justifique.