

Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo IV - Curso de Lic. em Matemática Diurno
Prof. Dr. Maurício Zahn

Lista 09 de Exercícios - Integrais duplas em coordenadas polares, mudança geral de coordenadas e impróprias

1. Use coordenadas polares para calcular cada integral a seguir.

(a) $\iint_{x^2+y^2 \leq r^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$ (b) $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ (c) $\iint_{x^2+y^2 \leq r^2} x^2 e^{-(x^2+y^2)^2} dx dy$

2. Passe para coordenadas polares e calcule $\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}} dy dx$.

3. Calcule $\iint_{\Omega} (x+y) dx dy$, onde Ω é a região que está à esquerda do eixo y e entre as circunferências $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$.

4. Passe para coordenadas polares e calcule $\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}} dy dx$.

5. Calcule $\iint_{\Omega} \cos(x^2+y^2) dx dy$, onde Ω é a região acima do eixo x e dentro da circunferência $x^2+y^2=9$.

6. Calcule $\iint_{\Omega} \arctan \frac{y}{x} dA$, onde Ω é a região do primeiro quadrante compreendida entre dois círculos $x^2+y^2=4$ e $x^2+y^2=2x$.

7. Calcule $\iint_{\Omega} x^2 dx dy$, onde $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$. (Resp.: $\frac{\pi}{8}$).

8. Calcule as seguintes integrais, efetuando uma mudança de coordenadas conveniente em cada caso.

(a) $\iint_{\Omega} \frac{(x+y)^7}{y-x} dx dy$, onde Ω é a região limitada pelas retas $y-x=3$, $y-x=1$, $y+x=3$ e $y+x=4$. (Resp.: $(\frac{4^8}{8} - \frac{3^8}{8}) \frac{\ln 3}{2}$)

(b) $\iint_{\Omega} (x-y)^2 \sin(x+y) dx dy$, onde Ω é o paralelogramo de vértices em $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ e $(0, \pi)$.

9. Calcule a integral dupla

$$\iint_{\Omega} \sqrt{x+y} \ln(x-3y) dx dy,$$

onde Ω é o quadrilátero $ABCD$ de vértices $A(\frac{7}{4}, \frac{1}{4})$, $B(\frac{9}{4}, -\frac{1}{4})$, $C(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ e $D(1, 0)$.

10. Calcule $\iint_{\Omega} \frac{\cos(x-y)}{\sin(x+y)} dx dy$, onde Ω é o trapézio formado por $1 \leq x+y \leq 2$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

11. Calcule $\iint_{\Omega} \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right)$, onde Ω é a região trapezoidal com vértices em $A(1, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, 2)$ e $D(0, 1)$.

12. Calcule a integral $\iint_{\Omega} (x+y)^2 \sin^2(x-y) dx dy$, onde $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq \pi\}$.

13. Calcule as integrais impróprias abaixo.

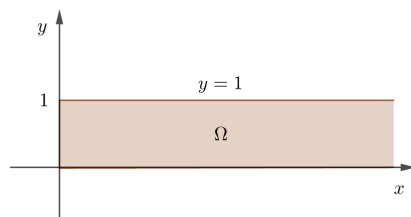
(a) $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x-y} dx dy$

(b) $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2-y^2} dx dy$

(c) $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{x^2 dx dy}{(x^2+y^2)^{\frac{7}{4}}}$

(d) $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \ln \sqrt{x^2+y^2} dx dy$

14. Seja Ω a semi-faixa infinita dada pela ilustração abaixo.



Determine $\iint_{\Omega} f$, sendo $f(x, y) = y^{-\frac{1}{2}} e^{-x}$.

15. Calcule $\iint_{\Omega} e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$, onde Ω é o triângulo delimitado pelos eixos $x = 0$, $y = 0$ e pela reta $x + y = 1$.