

Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo 3
Lista 05 de Exercícios - Diferenciais. Regra da cadeia. Derivada direcional
Prof. Dr. Maurício Zahn

1. Nos itens a seguir, mostre que f é diferenciável em todos os pontos do seu domínio. Em seguida, obtenha a matriz Jacobiana $d_a f$ de cada uma delas.

(a) $f(x, y) = x^2y - 2xy$ (b) $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$
(c) $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$ (d) $f(x, y) = \frac{y}{x}$

2. De cada função vetorial a seguir, obtenha a matriz Jacobiana:

(a) $f(x, y) = (e^{x^2+y^2}, 2x^2y + 3y^2, \sqrt{x^2 + y^2})$
(b) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, xyz, \cos xy, x^2 - yz)$

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y^2}{x^4 + y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Mostre que $\frac{\partial}{\partial x}f(0, 0)$ e $\frac{\partial}{\partial y}f(0, 0)$ existem, mas que f não é diferenciável na origem.

4. Uma *equação diferencial parcial* - EDP - é uma equação diferencial que envolve derivadas parciais de uma função de várias variáveis reais. A equação diferencial parcial do calor, dada por

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

modela a variação da temperatura à medida que o calor se espalha através de um objeto.

Mostre que $f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ satisfaz a equação do calor dada acima.

5. Calcule as diferenciais totais de cada função a seguir:

(a) $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ (b) $z = \ln(xy + y^2)$
(c) $z = \arctan \frac{x + y}{1 - xy}$ (d) $z = \frac{ye^x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
(e) $z = \arcsin(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2})$ (f) $z = \frac{x \sin y}{\cos(xy)}$

6. Calcule cada derivada parcial indicada, usando a regra da cadeia.

(a) $u = \ln xy + y^2$, onde $x = e^t$ e $y = e^{-t}$. Obter $\frac{\partial u}{\partial t}$.
(b) $u = x^2yz$, onde $x = \frac{r}{s}$, $y = re^s$ e $z = re^{-s}$. Obter $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial u}{\partial s}$ e $\frac{\partial u}{\partial t}$.
(c) $u = \arcsin(3x + y)$, onde $x = r^2e^s$ e $y = \sin rs$. Obter $\frac{\partial u}{\partial r}$ e $\frac{\partial u}{\partial s}$.

7. Se $u = f(x, y)$ é uma função diferenciável de x e y com $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$, mostre que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\rho}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{\rho}$$

8. Suponha que $u = f(x, y, z)$ seja diferenciável, onde $x = \rho \sin \phi \cos \theta$, $y = \rho \sin \phi \sin \theta$ e $z = \rho \cos \phi$. Calcule $\frac{\partial u}{\partial \rho}$, $\frac{\partial u}{\partial \phi}$ e $\frac{\partial u}{\partial \theta}$ em termos das derivadas parciais em x, y e z .

9. Suponha que $f(x, y)$ seja uma função de $x = x(t, s)$ e $y = y(t, s)$. Mostre que

$$f_{tt} = f_{xx} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + 2f_{xy} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) + f_{yy} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + f_x \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + f_y \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

10. Usando a definição de derivada direcional, calcule a derivada direcional de cada função abaixo, na direção do vetor unitário $\vec{u}$ dado. Em seguida, use o teorema visto em aula para calcular a referida derivada.

(a) $f(x, y) = 2x^2 + 5y^2$; $\vec{u} = \cos \frac{\pi}{4} \vec{i} + \sin \frac{\pi}{4} \vec{j}$

(b) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$; $\vec{u} = \frac{3}{5} \vec{i} - \frac{4}{5} \vec{j}$

11. De cada item a seguir, encontre o gradiente de f em P e a taxa de variação do valor da função na direção e sentido de $\vec{u}$ em P .

(a) $f(x, y) = e^{2xy}$; $P(-2, 2)$; $\vec{u} = (\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3})$

(b) $f(x, y, z) = 2x^3 + xy^2 + xz^2$; $P(1, 1, 1)$; $\vec{u} = \frac{\sqrt{21}}{7} \vec{j} - \frac{2\sqrt{7}}{7} \vec{k}$

12. Em cada item, obtenha a derivada direcional no ponto P , segundo a direção θ indicada.

(a) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $P(2, 1)$, $\theta = 60^\circ$.

(b) $f(x, y) = e^x \cos y$, $P(0, 0)$, $\theta = 60^\circ$.

(c) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $P(1, 1)$, $\theta = 45^\circ$.

13. Calcule o módulo e a direção do gradiente do potencial $v(x, y) = \ln \sqrt{\frac{x^2 + (y-2)^2}{x^2 + (y+2)^2}}$ no ponto $P(2, 0)$.

14. Seja $f(x, y) = x^2 - y^2$. Represente geometricamente $\nabla f(x_o, y_o)$, sendo

(a) $(x_o, y_o) = (1, 1)$. (b) $(x_o, y_o) = (-1, 1)$. (c) $(x_o, y_o) = (-1, -1)$.

15. Seja $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$. Represente geometricamente $\nabla f(x_o, y_o)$, sendo (x_o, y_o) um ponto da circunferência $x^2 + y^2 = 1$.