

Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo 3
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 03 de Exercícios - Limite e continuidade

1. Use a definição de limite para provar que:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (2x - 4y) = -6$ (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (3x + 4y) = 7$.

2. Em cada exercício a seguir, mostre que não existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

(a) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ (b) $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ (c) $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$

3. Mostre que o limite

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^4 + yx^3 + z^2 x^2}{x^4 + y^4 + z^4}$$

não existe.

4. Prove que o limite

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy + xz + yz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

existe.

5. Em cada exercício a seguir, mostre que existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

(a) $f(x, y) = \frac{x^2 y + xy^2}{x^2 + y^2}$ (b) $f(x, y) = \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ (c) $f(x, y) = \frac{x^2 + 2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

6. Mostre que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{\sin x \sin y} = 1$. Repare que a função só é definida para $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

7. Sabendo que

$$1 - \frac{x^2 y^2}{3} < \frac{\arctan xy}{xy} < 1,$$

o que pode-se dizer sobre

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\arctan xy}{xy} ? \text{ Justifique.}$$

8. Sabendo que $2|xy| - \frac{x^2 y^2}{6} < 4 - 4 \cos \sqrt{|xy|} < 2|xy|$, calcule $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4 - 4 \cos \sqrt{|xy|}}{|xy|}$.

9. Calcule, se existir, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cos \frac{1}{y}$, lembrando que $|\cos \alpha| < 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

10. Calcule o limite de cada função vetorial a seguir:

(a) $\lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{t} - 1}{1 - t^2} \vec{i} + \ln(t) \vec{j} + \frac{1 - \cos t}{2t} \vec{k} \right)$ (b) $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{2^t - 1}{t}, \frac{\sin 3t}{2t}, \frac{t^2 - t}{\sqrt{t+1} - 1} \right)$

11. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ função vetorial dada por $g(t) = (t^2, t^3)$. Calcule $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}$.

12. Calcular o limite e analisar a continuidade da função vetorial $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\vec{f}(t) = \begin{cases} \frac{|t-3|}{t-3} \vec{i} + t^2 \vec{j}, & \text{se } t \neq 3 \\ \vec{0}, & \text{se } t = 3 \end{cases}$$

13. Nos exercícios a seguir verifique se f é contínua na origem.

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(d) f(x, y) = \begin{cases} \frac{2y^2 - 3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

14. Determine os pontos onde $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{x+y}, & \text{se } x+y \neq 0 \\ 1, & \text{se } x+y = 0 \end{cases}$ é contínua.

15. Seja A o conjunto dado por

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq \ln x, 1 \leq x \leq 2\}$$

- (a) Desenhe o conjunto A . Este conjunto é um compacto do $\mathbb{R}^2$? Justifique.
- (b) Mostre que a função $f(x, y) = x^2 + (y-1)^2$ assume um valor máximo e um valor mínimo em A .