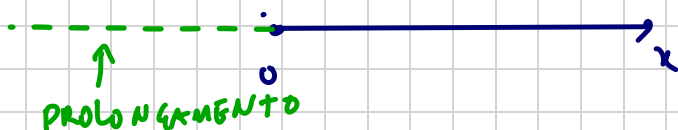


INTEGRAIS EM COORDENADAS POLARES

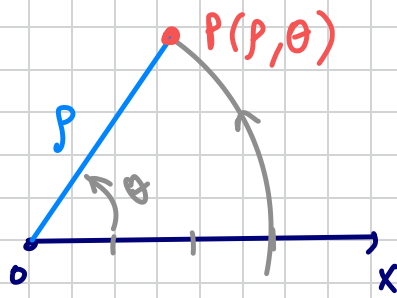
SISTEMA DE COORDENADAS POLARES. É o sistema de pontos no plano, da forma (p, θ) onde $p \in \mathbb{R}$ e θ é um ângulo, $\theta \in [0, 2\pi]$. O plano no qual estes pontos são marcados chama-se PLANO POLAR, e é formado por uma semi-reta positiva. Assim, um ponto $P(p, \theta)$ é marcado no plano da seguinte



forma: marcamos p na semi-reta (se $p < 0$, marcamos no seu prolongamento) e, em



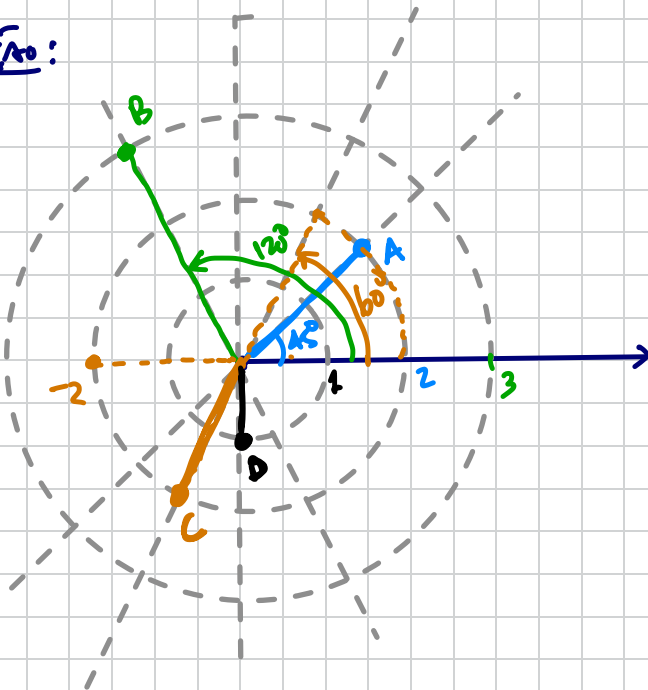
seguida, marcamos o ângulo, como na Trigonometria (sentido anti-horário).



Ex: Marque no plano polar os pontos:

$$A(2, \frac{\pi}{4}) ; \quad B(3, \frac{2\pi}{3}) ; \quad C(-2, 60^\circ)$$

Solução:



$$D(1, -90^\circ)$$



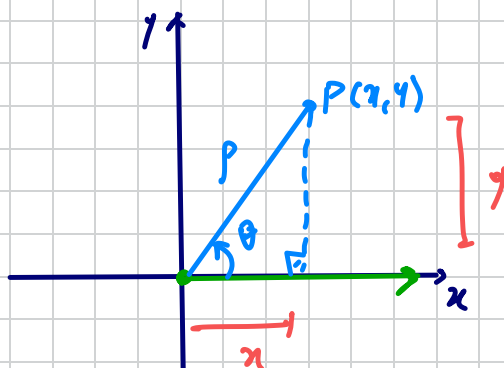
$$D(1, 270^\circ)$$



$$D(-1, 90^\circ)$$

CONVERSÃO SISTEMA RETANGULAR $\leftrightarrow$ POLAR

Considere $P(x, y)$ no sistema retangular e o sistema $\rho\theta$ com origem e eixo horizontal coincidindo.



Seo T. de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Além disso:

$$\sin \theta = \frac{y}{\rho} \Rightarrow \boxed{y = \rho \cdot \sin \theta}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\rho} \Rightarrow \boxed{x = \rho \cos \theta}$$

Temos também que

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \boxed{\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$$

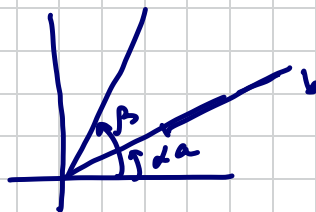
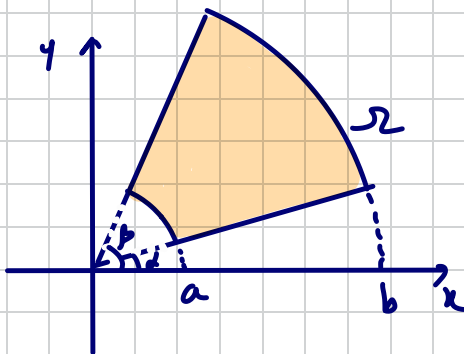
INTEGRAIS DUPLAS EM COORDENADAS POLARES:

Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável.

No que segue, vamos descrever a técnica usada para calcular $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ quando a região Ω

é composta por arcos de circunferências ou circunferências inteiras.

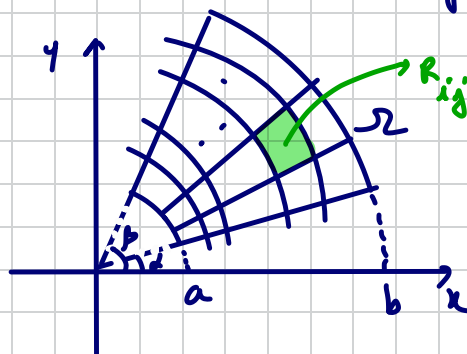
Seja Ω uma região dada em termos de setor circular como na ilustração:



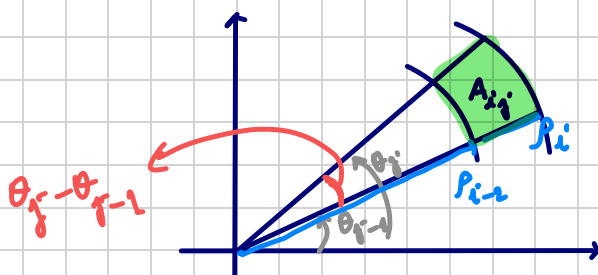
Seja $P = P_1 \times P_2$ uma partição da região Ω ,
onde $P_1 = \{a = \rho_0 < \rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_m = b\}$ e

$$P_2 = \{\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_m = \beta\},$$

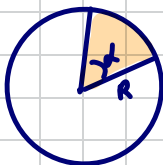
Determinando sub-regiões R_{ij} .



O volume (no caso área) de cada região R_{ij} será a área de uma diferença de setores circulares:



obs. Área de um setor circular:



$$A = \pi R^2 \times \frac{\alpha}{2\pi \text{ rad}}$$

$$A_{\text{setor}} = \frac{1}{2} \alpha R^2$$

$$A_{\text{setor}} = \frac{1}{2} \alpha R^2$$

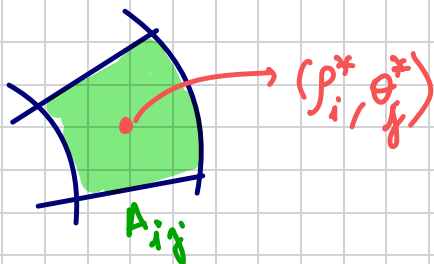
(α em radianos)

$$A_{ij}^- = A_{\text{setor maior}} - A_{\text{setor menor}}$$

$$\underline{A_{ij}^-} = \frac{1}{2} \cdot (\theta_j - \theta_{j-1}) \cdot p_i^2 - \frac{1}{2} \cdot (\theta_j - \theta_{j-1}) \cdot p_{i-1}^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\theta_j - \theta_{j-1}) \cdot (p_i^2 - p_{i-1}^2)$$

$$= \frac{1}{2} (\theta_j - \theta_{j-1}) \cdot (p_i + p_{i-1}) \cdot (p_i - p_{i-1}) \quad (*)$$



Seja (p_i^*, θ_j^*) o ponto médio de A_{ij} ; ou

$$\text{seja, } p_i^* = \frac{p_i + p_{i-1}}{2} \quad \text{e } \theta_j^* = \frac{\theta_j + \theta_{j-1}}{2}$$

$$\text{Então } \Delta p_i = p_i - p_{i-1} \quad \text{e } \Delta \theta_j = \theta_j - \theta_{j-1},$$

tamos que $(*)$ fica:

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \underbrace{(\theta_j - \theta_{j-1})}_{\Delta \theta_j} \cdot \underbrace{(r_i + r_{i-1})}_{r_i^*} \cdot \underbrace{(r_i - r_{i-1})}_{\Delta r_i}$$

$$\Rightarrow A_{ij} = r_i^* \cdot \Delta r_i \cdot \Delta \theta_j$$

Lembrando que $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$,
montamos a soma de Riemann:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f(x^*, y^*) \cdot \underbrace{\text{Vol}(R_{ij})}_{A_{ij}} =$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) \cdot A_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) \cdot r_i^* \Delta r_i \Delta \theta_j.$$

Tomando o limite com $m, n \rightarrow \infty$, temos
obtemos:

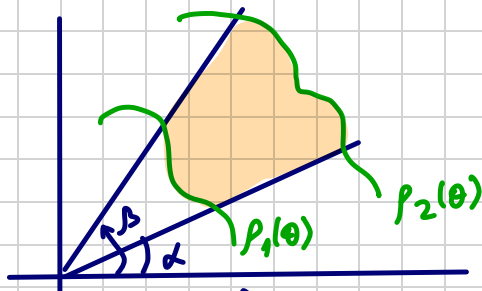
$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega} f(x,y) dA &= \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\rho_i^* \cos \theta_j^*, \rho_i^* \sin \theta_j^*) \rho_i^* \Delta \rho_i \Delta \theta_j = \\
 &= \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{\rho=a}^{\rho=b} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cdot \rho d\rho d\theta.
 \end{aligned}$$

Outro jeito:

$$\iint_{\Omega} f(x,y) dA = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{\rho=a}^{\rho=b} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cdot \rho d\rho d\theta$$

INTEGRAL DUPLA EM COORDENADAS POLARES.

Obs.: Podemos ter $\rho = \rho_1(\theta)$ e $\rho = \rho_2(\theta)$, e então:



$$\Rightarrow \iint_{\Omega} f = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cdot \rho d\rho d\theta$$

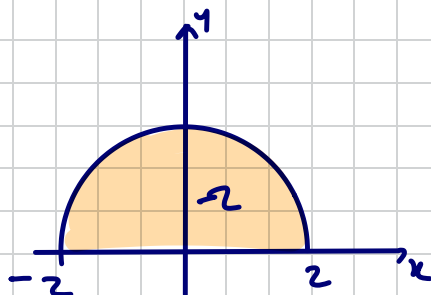
EXEMPLOS:

01) Calcule $\iint_{\Omega} (x+2y) dx dy$, sendo Ω

a região dada por: $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$.

Solução: A região Ω é dada por:

$$f(x,y) = x+2y$$



$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$dx dy = \rho d\rho d\theta$$

Assim, temos:

$$\iint_{\Omega} (x+2y) dx dy = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=2} (\rho \cos \theta + 2\rho \sin \theta) \cdot \rho d\rho d\theta.$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=2} (\rho^2 \cos \theta + 2\rho^2 \sin \theta) d\rho d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=2} (\cos \theta + 2\sin \theta) \cdot \rho^2 d\rho d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} (\cos\theta + 2\sin\theta) \cdot \int_{\rho=0}^{\rho=2} \rho^2 d\rho d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} (\cos\theta + 2\sin\theta) d\theta \cdot \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^2 =$$

$$= \left(\sin\theta - 2\cos\theta \right) \bigg|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \cdot \left(\frac{8}{3} - 0 \right) =$$

$$= \left[\sin\pi - 2\cos\pi - (\sin 0 - 2\cos 0) \right] \cdot \frac{8}{3} =$$

$$= \frac{8}{3} \cdot (0 - 2(-1) - (0 - 2 \cdot (1))) =$$

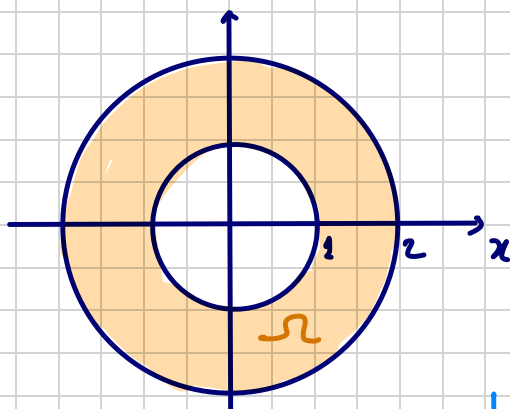
$$= \frac{8}{3} \cdot (2 + 2) = \frac{32}{3} //$$



02) Calcule $\iint_{\Omega} \frac{y \, dA}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; sendo

$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \}.$$

Solução: A região Ω tem o esboço:



$$\iint_{\Omega} \frac{y \, dx \, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\rho=1}^{\rho=2} \frac{\cancel{\rho} \sin \theta \cdot \overbrace{\rho \, d\rho \, d\theta}^{dx \, dy}}{\cancel{\rho}} =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \sin \theta \left(\int_{\rho=1}^{\rho=2} \rho \, d\rho \right) d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \sin \theta \cdot \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_1^2 d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \sin \theta \cdot \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) d\theta = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot (-\cos \theta) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{2} \cdot (-\cos 2\pi - (-\cos 0)) =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot (-1 + 1) = 0 //$$

