

cálculo IV

19/09/26 - AULA 08

TEOREMA DA MÉDIA : Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, com Ω compacto^(*) e conexo^(**) do $\mathbb{R}^2$.

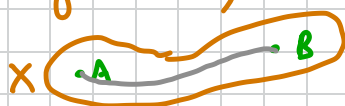
Então, $\exists (\alpha, \beta) \in \Omega$ tal que

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{A} \cdot \iint_{\Omega} f(x, y) dA,$$

onde A denota a área da região Ω .

(*) Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ é compacto quando for limitado e fechado.

(**) Um conj. $X \subset \mathbb{R}^m$ é conexo se, dados dois pontos quaisquer no interior de X , existir um caminho ligando-os, inteiramente contido em X .



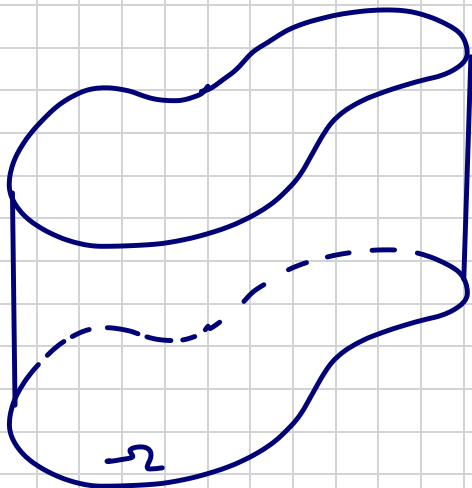
X CONEXO



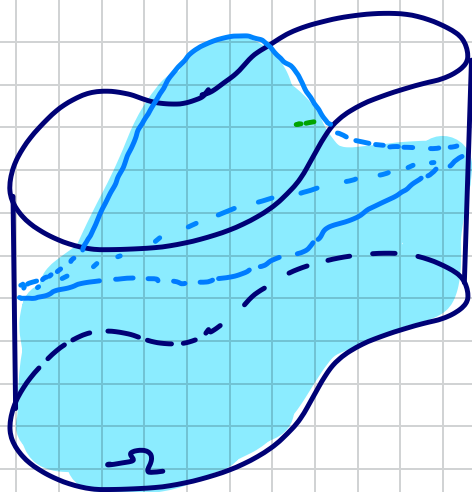
X não-conexo.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO TEOREMA:

Imagine que tenhamos um "copo cilíndrico exótico", onde a base seja a região Ω , limitada e conexa.



Imagine que f seja um sorvete congelado, armazenado irregularmente em Ω , conforme o esquema:

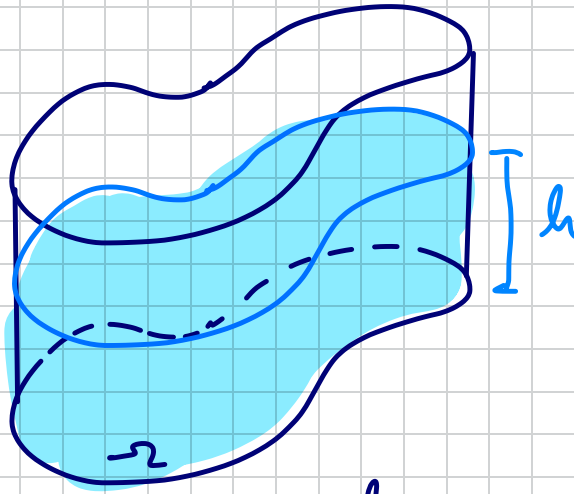


[EXPERIMENTE OS NOSSOS SABORES CÉSIO 136
E URÂNIO ENRIQUECIDO, COM PLOCOS DE TUNGSTÊNIO]

O volume desse sorvete será dado por

$$V = \iint_{\Omega} f(x, y) \, dA$$

Imagine que o sorvete derreta. Admita que não haja perda de material nesse derretimento. A base continua sendo Ω , mas a altura vai tornar-se uma altura intermediária, denotada por h .



Assim, $V = A \cdot h$
 $V = A \cdot h$.

Por outro lado,

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dA = V = A \cdot h$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\text{...} \\ \text{//} \\ f(x, y)}}{h} = \frac{1}{A} \iint_{\Omega} f(x, y) dA.$$

Vamos à demonstração do teorema:

DEMONSTRAÇÃO:

Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, com Ω compacto e conexo.

Em particular, Ω é compacto. Então, pelo T. de WEIERSTRASS, f assume valores máximos e mínimos no interior de Ω .

Assim, sejam (x_0, y_0) e (x_1, y_1) no interior de Ω tais que

$$f(x_0, y_0) = \min_{\Omega} f, \quad e$$

$$f(x_1, y_1) = \max_{\Omega} f$$

Então, $\forall (x, y) \in \Omega$, tem-se que

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \leq f(x_1, y_1)$$

Integrando em Ω , vem:

$$\iint_{\Omega} \underbrace{f(x_0, y_0)}_{\text{const.}} dA \leq \iint_{\Omega} f(x, y) dA \leq \iint_{\Omega} \underbrace{f(x_1, y_1)}_{\text{const.}} dA$$

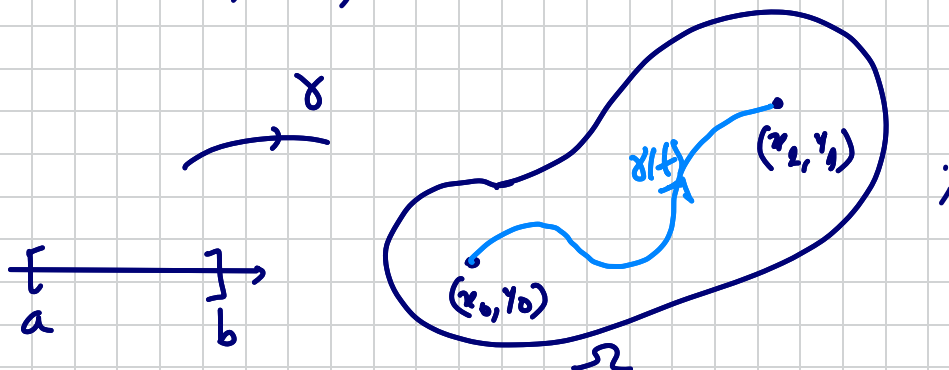
$$\Rightarrow f(x_0, y_0) \cdot \underbrace{\int_{\Omega} dA}_{A} \leq \int_{\Omega} f(x, y) dA \leq f(x_1, y_1) \cdot \underbrace{\int_{\Omega} dA}_{A}$$

Logo:

$$f(x_0, y_0) \cdot A \leq \int_{\Omega} f(x, y) dA \leq f(x_1, y_1) \cdot A$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(x_0, y_0)}_{\in \mathbb{R}} \leq \frac{1}{A} \int_{\Omega} f(x, y) dA \leq \underbrace{f(x_1, y_1)}_{\in \mathbb{R}} \quad (*)$$

Como Ω também é conexo, seja $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ um caminho do ponto (x_0, y_0) ao ponto (x_1, y_1) ; γ contínua.



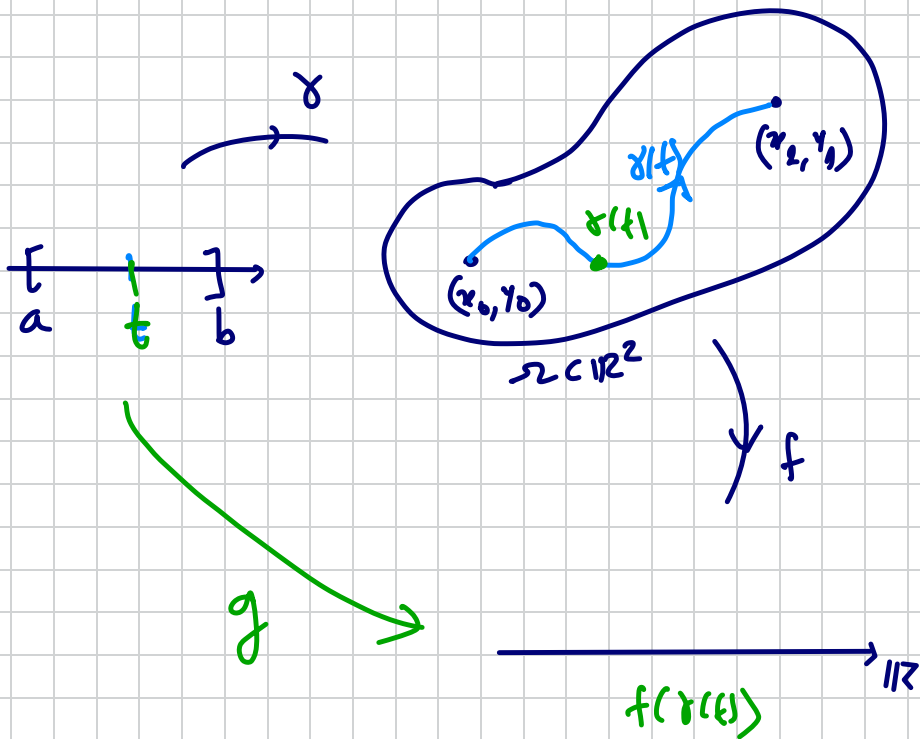
onde $\gamma(a) = (x_0, y_0)$

$$\gamma(b) = (x_1, y_1)$$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

Defina $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$g(t) = f(\gamma(t)) = (f \circ \gamma)(t)$$



Note que g é contínua porque f e γ o são, e composição de funções contínuas resulta em uma função contínua.

Além disso, note que:

$$g(a) = f(\gamma(a)) = f(x_0, y_0) ;$$

e

$$g(b) = f(\gamma(b)) = f(x_1, y_1).$$

Então, (*) fica:

$$g(a) \leq \frac{1}{A} \iint_{\gamma} f(x, y) dA \leq g(b),$$

e como g é contínua, pelo TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO (T.V.I.) (*) segue que: $\exists c \in [a, b]$

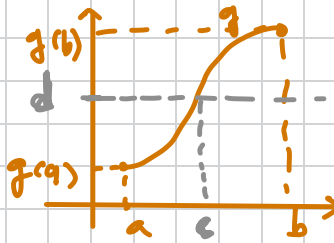
$$\text{tal que } g(c) = \frac{1}{A} \iint_{\gamma} f(x, y) dA.$$

Ou seja:

T.V.I.: $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, com

$g(a) < d < g(b)$, então $\exists c \in [a, b]$

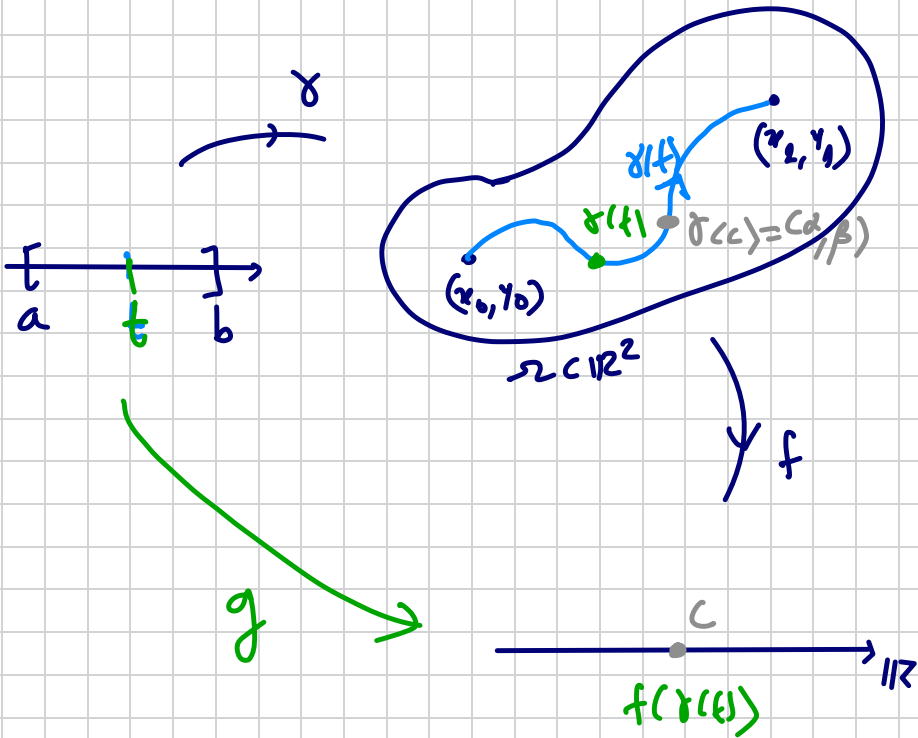
tal que $g(c) = d$.



$$g(c) = d.$$

$$\frac{1}{A} \iint_{\Omega} f(x,y) dA = g(c) = f(\gamma(c)),$$

onde $\gamma(c) = (\alpha, \beta)$ some γ .



On reje,

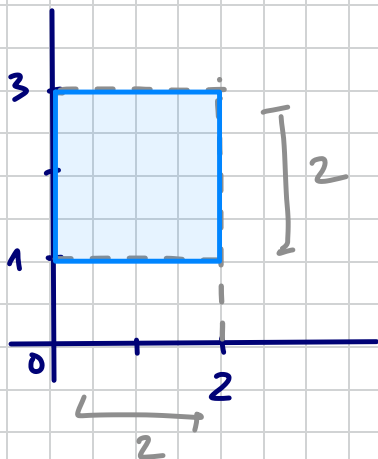
$$f(\alpha, \beta) = g(c) = \frac{1}{A} \iint_{\Omega} f(x,y) dA$$

Obs: $f(\alpha, \beta)$ do teorema acima chama-se valor médio de f em Ω ; também denotado por V.M.

Exemplo: Obtenha o valor médio de $f(x, y) = x \cdot y^2$ em $\Omega = [0, 2] \times [1, 3]$.

Solução:

$$V.M = f(\alpha, \beta) = \frac{1}{A} \cdot \iint_{\Omega} x y^2 dA$$



$$A = 2 \times 2 = 4 //$$

$$\Rightarrow V.M = \frac{1}{4} \cdot \iint_{\Omega} x y^2 dA =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int_{y=1}^3 \int_{x=0}^2 x y^2 dx dy = \frac{1}{4} \cdot \int_{y=1}^3 y^2 dy \cdot \int_{x=0}^2 x dx =$$

NESTE CASO
 É POSSÍVEL PENSAR
 COMO UM PRODUTO
 DE DUAS INTEGRAIS

$$= \frac{1}{4} \cdot \left. \frac{y^3}{3} \right|_1^3 \cdot \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3^3}{3} - \frac{1}{3} \right) \cdot \left(\frac{4}{2} - 0 \right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{26}{3} \right) \cdot 2 = \frac{13}{3} //$$

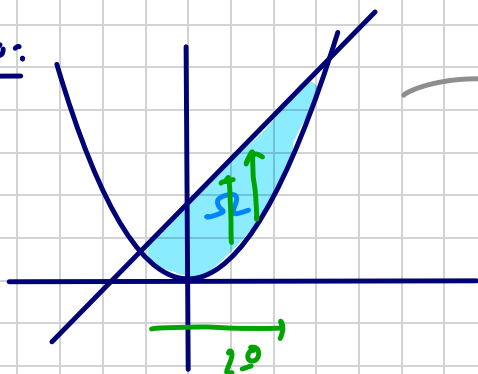
$$\Rightarrow v.m = f(\alpha, \beta) = \frac{13}{3} //$$

~~~~~

02) Calcule o valor médio para

$f(x, y) = xy - y^2$  na região  $\mathcal{R}$  dada pelas curvas  $y = x^2$  e  $y = x + 1$ .

Solução:



$$\rightarrow x^2 = x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{+1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$v.m = \frac{1}{A} \cdot \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA. ; \text{ onde}$$

a área  $A$  é calculada por:

$$A = \iint_{\mathcal{R}} dA = \int_{x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \int_{y=x^2}^{y=x+1} dy dx =$$

$$= \int_{x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}} y \Big|_{y=x^2}^{y=x+1} dx =$$

obs:  $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$   
 $1-y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$x = \varphi$$

$$= \int_{x=1-\varphi}^{\varphi} (x+1-x^2) dx = \left( \frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{1-\varphi}^{\varphi} =$$

$$= \frac{\varphi^2}{2} + \varphi - \frac{\varphi^3}{3} - \left( \frac{(1-\varphi)^2}{2} + (1-\varphi) - \frac{(1-\varphi)^3}{3} \right)$$

$$= \frac{\varphi+1}{2} + \varphi - \frac{\varphi}{3} \cdot (\varphi+1) - \left( \frac{1-2\varphi+\varphi^2}{2} + 1-\varphi - \frac{(1-\varphi)(1-\varphi)^2}{3} \right)$$

↑  
PROPIEDADES DO  
NÚMERO DE OURO:

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

$$= \dots = \frac{5\sqrt{5}}{6}$$

$$\Rightarrow A = \frac{5\sqrt{5}}{6}$$

↑  
AIÓS  
MISTAS  
CONTAS

Então,

$$v.m. = \frac{1}{A} \iint_{\Omega} f(x,y) dA \quad , \text{ onde}$$

$$A = \frac{5\sqrt{5}}{6}$$

$$\int\int_{\Omega} f(x,y) dA = \int_{x=-1-4}^{x=4} \int_{y=x^2}^{y=x+1} (xy - y^2) dy dx =$$

$$\dots = \underline{\underline{-\frac{5\sqrt{5}}{12}}};$$

e então:

$$v.m. = \frac{1}{A} \cdot \iint_{\Omega} f(x,y) dA =$$

$$= \frac{1}{\cancel{5\sqrt{5}}} \cdot \left( \cancel{-\frac{5\sqrt{5}}{12}} \right) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

~~~~~