

Na aula passada estudamos a derivada direcional e o vetor gradiente.

Vimos que, dado $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{int}(\Omega)$ e $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$, com $\|\vec{u}\|=1$, sendo f diferenciável em a , então:

$$\begin{aligned} \underline{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cdot \vec{u}) - f(a)}{t} = \\ &= \left(\underset{a}{d} f \right) \cdot \vec{u} = \underline{\nabla f(a) \cdot \vec{u}} ; \end{aligned}$$

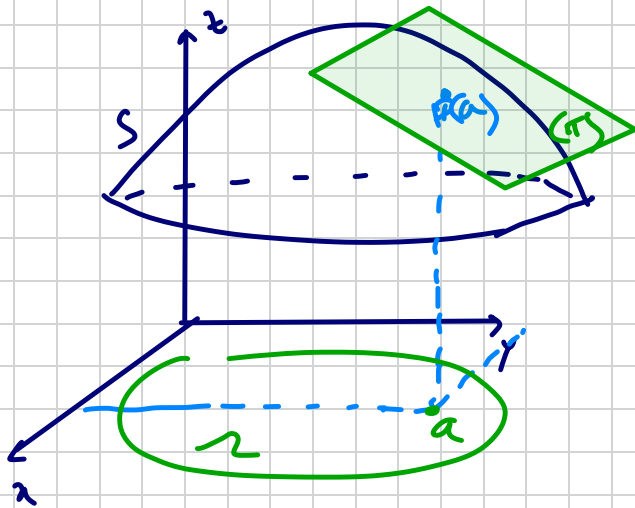
$$\text{onde } \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right)$$

Na aula de hoje mostraremos uma aplicação envolvendo o vetor gradiente.

PLANO TANGENTE A UMA SUPERFÍCIE DO $\mathbb{R}^3$:

Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, determinando uma superfície S do $\mathbb{R}^3$.

Seja $a \in \text{int}(\Omega)$ um ponto. Queremos obter a equação do plano tangente à superfície S no ponto a .



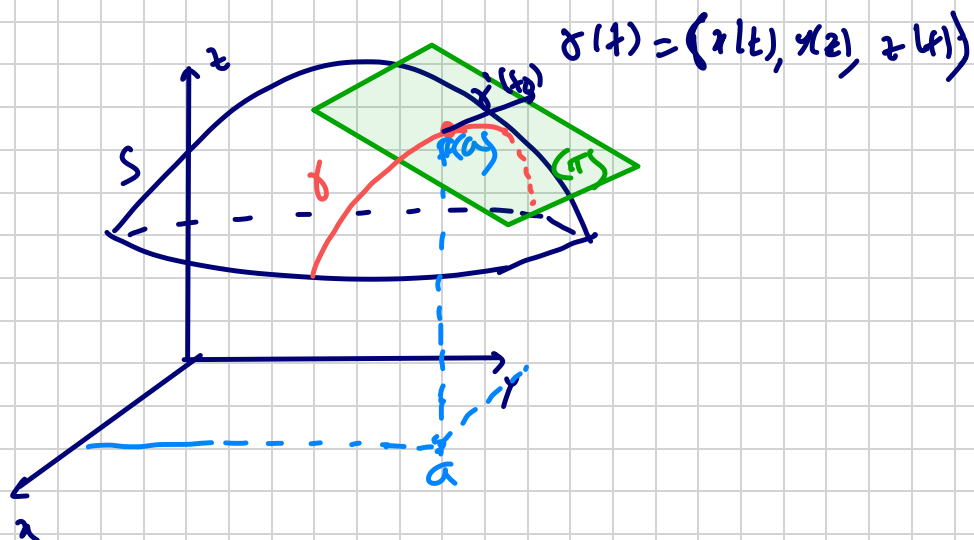
A superfície S é dada por $z = f(x, y)$

Então, podemos definir $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$$

(isto descreve a superfície S)

Seja $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva qualquer sobre S , passando pelo ponto a .



Assim, $\exists t_0 \in [\alpha, \beta]$ tal que

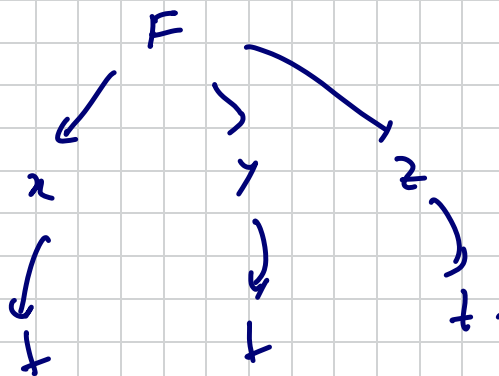
$$\gamma(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = F(a)$$

O vetor tangente a γ em t_0 será dado por

$$\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

Note que; pela F , teremos:

$$F(\gamma(t)) = F(x(t), y(t), z(t))$$



Então; derivando em t :

$$\begin{aligned}
 0 &= \left(F(x(t)) \right)' = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \\
 &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \\
 &= \nabla F \cdot \delta'(t)
 \end{aligned}$$

produto escalar.

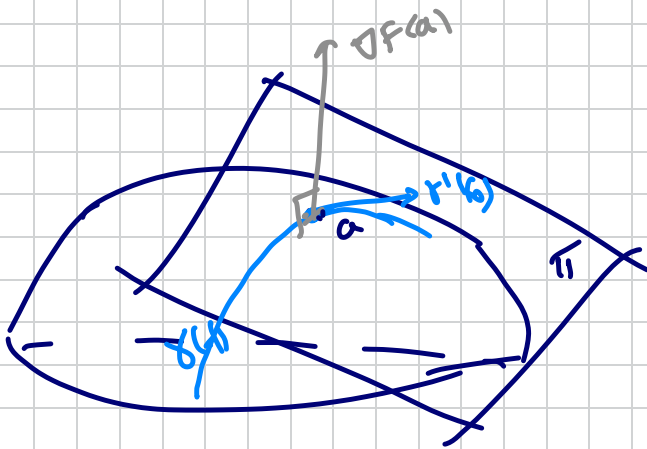
$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$$

No ponto t_0 :

$$0 = \left(F(x(t)) \right)' \Big|_{t=t_0} = \nabla F(a) \cdot \delta'(t_0)$$

$$\Rightarrow \nabla F(a) \cdot \gamma'(t_0) = 0$$

Logo, $\nabla F(a)$ é ortogonal ao plano (π) que contém o ponto a .



Então, a eq. do plano (π) tangente à superfície S no ponto a , será dada por; tomando $P(x, y, z) \in (\pi)$, então; sendo $\underline{F(a)} = (x_0, y_0, z_0)$

$$\overrightarrow{QP} = P - Q = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$\Rightarrow (\pi): \nabla F(P) \cdot \overrightarrow{QP} = 0$$



produto escalar.



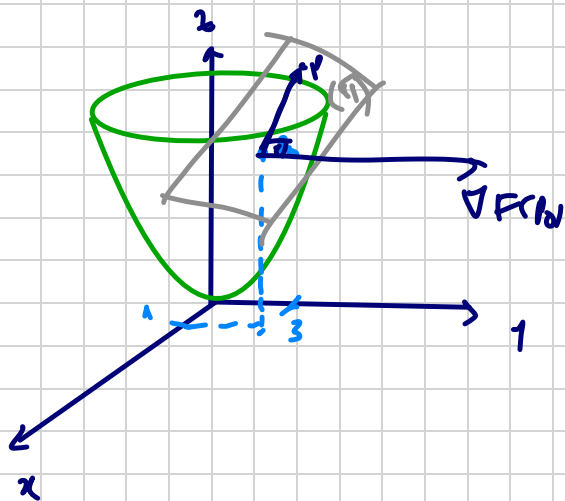
Sejam os um exemplo:

ex-1 Obtenha a equação do plano tangente à superfície S dada por $f(x,y) = x^2 + y^2$ no ponto $P_0(1,3)$.

Solução:

$$F(x,y,z) = f(x,y) - z.$$

$$P_0(1,3, f(1,3)) = (1,3, 1^2+3^2) \rightarrow (1,3,10)$$



$$(\pi): \nabla F(P_0) \cdot \vec{P_0P} = 0; \quad \text{onde } P(x,y,z) \text{ resolve } S.$$

$$\vec{P_0P} = (x,y,z) - (1,3,10) = (x-1, y-3, z-10)$$

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = x^2 + y^2 - z$$

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = (2x, 2y, -1)$$

$$\nabla F(p_0) = (2 \cdot (1), 2 \cdot (3), -1) = (2, 6, -1)$$

Assim; a eq. do plano (π) , tangente à S em p_0 , será:

$$(\pi): \nabla F(p_0) \cdot \overrightarrow{p_1 p_0} = 0$$

$$(\pi): (2, 6, -1) \cdot (x-1, y-3, z-10) = 0$$

$$(\pi): 2 \cdot (x-1) + 6 \cdot (y-3) + (-1) \cdot (z-10) = 0$$

$$(\pi): 2x - 2 + 6y - 18 + z - 10 = 0$$

$$\boxed{(\pi): 2x - 6y + z - 30 = 0}$$

02) (STEWART, vol 2, pág. 849) 7ª ed.

45) $x + y + z = e^{xyz}$. Obter a eq. do plano tangente no ponto $p_0(0, 0, 1)$.

Solução: $\underbrace{x + y + z - e^{xyz}}_{F(x,y,z)} = 0$

$P_0(0,0,1)$

Naite com:

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$\nabla F = \left(1 - e^{xyz} \cdot yz, 1 - e^{xyz} \cdot xz, 1 - e^{xyz} \cdot xy \right)$$

$$\nabla F(P_0) = (1, 1, 1)$$

$$P(x,y,z) \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} = P - P_0 = (x,y,z) - (0,0,1) \\ = (x-0, y-0, z-1)$$

$$= (x, y, z-1)$$

Logo: $\overrightarrow{P_0P} = (x, y, z-1)$

Assim, a eq. do plano(π) será:

$$(\pi): \nabla F(P_0) \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$(\pi): (1, 1, 1) \cdot (x, y, z-1) = 0$$

$$(\pi): x + y + z - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{(\pi): x + y + z - 1 = 0}$$

O conteúdo da 1ª parte vai até esse tópico.