

DERIVADA DIRECIONAL E O VETOR GRADIENTE:

Defr Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar e $a \in \text{int}(\Omega)$. Dado um vetor unitário $\vec{u}$ (isto é, $\|\vec{u}\|=1$), definiremos a derivada de f no ponto a , na direção do vetor $\vec{u}$, por:

$$D_{\vec{u}} f(a) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cdot \vec{u}) - f(a)}{t},$$

se este limite existir.

Seu exemplo, sendo $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,
 $a = (x_0, y_0) \in \text{int}(\Omega)$, e tome $\vec{u} = \vec{i} = (1, 0)$
Neste caso, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \vec{i}) - f(a)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((x_0, y_0) + t \cdot (1, 0)) - f(x_0, y_0)}{t} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$$

On se, conclurons que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$$

De même forme, trouvons que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

$$\vec{a} = (0, 1)$$

Ex.: Soit $f(x, y) = x^2 y$; $\vec{u} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2, 3)$.

Solution: Note que $\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$
 $= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \underline{\underline{1}}$

Anim, fexem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2,3) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(2,3 + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\right) - f(2,3)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(2 - \frac{1}{2}t, 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - f(2,3)}{t}\end{aligned}$$

Como $f(x,y) = x^2 y$, então:

$$\begin{aligned}\bullet \quad f\left(2 - \frac{1}{2}t, 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) &= \left(2 - \frac{1}{2}t\right)^2 \cdot \left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) = \\ &= \left(4 - 2t + \frac{1}{4}t^2\right) \cdot \left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ &= 12 - 6t + \frac{3}{4}t^2 + 2\sqrt{3}t - \sqrt{3}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{8}t^3\end{aligned}$$

$$\bullet \quad f(2,3) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

Logo fexem:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2,3) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cancel{12} - 6t + \frac{3}{4}t^2 + 2\sqrt{3}t - \sqrt{3}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{8}t^3 - \cancel{12}}{t}$$

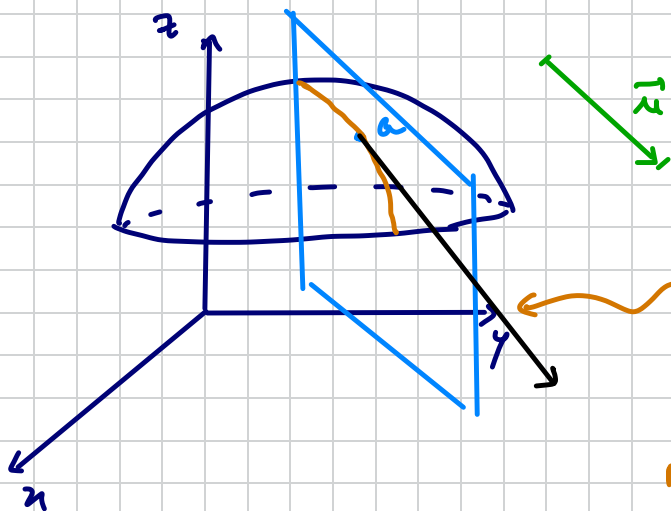
$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \left(-6 + \frac{3}{4}t + 2\sqrt{3} - \sqrt{3}t + \frac{\sqrt{3}}{8}t^2 \right)}{t} =$$

$$= 2\sqrt{3} - 6.$$

conclusão: $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2,3) = 2\sqrt{3} - 6}$

SIGNIFICAÇÃO GEOMÉTRICA DA DERIVADA DIRECIONAL:

Dada $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{u}$ tal que $\|\vec{u}\| = 1$, $a \in \text{int}(\Omega)$ então $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a)$ fornece a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto a , que é paralela ao vetor $\vec{u}$.



← VETOR
TANGENTE
AO GRÁFICO DE
 f NO PONTO a ,
PARALELO AO
VETOR UNITÁRIO $\vec{u}$.

O cálculo de derivada direcional feito acima foi
pela definição, que deu bastante trabalho. Felizmente
há um resultado que torna o cálculo mais
simples:

TEOREMA: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferen-
ciável em um ponto $a \in \text{int}(\Omega)$ e $\vec{u}$ um
vetor tal que $\|\vec{u}\| = 1$. Então:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = d_a f \cdot \vec{u} = f'(a) \cdot \vec{u}$$

↑
PRODUTO ESCALAR.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável
em $a \in \text{int}(\Omega)$. Então, tomando $h \in \mathbb{R}^m$
tal que $a+h \in \text{int}(\Omega)$, temos:

$$f(a+h) = f(a) + \left(d_a f\right) \cdot h + \|h\| \cdot \eta(h),$$

$$\text{onde } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta(h)}{h} = 0.$$

Em particular, tome $h = t \cdot \vec{u}$, onde $\|\vec{u}\| = 1$.

Assim:

$$f(a + t\vec{u}) = f(a) + (d_a f) \cdot (t\vec{u}) + \|t\vec{u}\| \cdot \eta(t\vec{u})$$

$$\Rightarrow f(a + t\vec{u}) - f(a) = (d_a f) \cdot (t\vec{u}) + \|t\vec{u}\| \cdot \eta(t\vec{u})$$

Dividindo por t , obtemos:

$$\frac{f(a + t\vec{u}) - f(a)}{t} = \frac{(d_a f) \cdot (t\vec{u})}{t} + \frac{\|t\vec{u}\|}{t} \cdot \eta(t\vec{u})$$

Assim, passando o limite com $t \rightarrow 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t\vec{u}) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cancel{t} \cdot (d_a f) \cdot \vec{u}}{\cancel{t}} + \\ &+ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overset{+1}{\cancel{t}} \cdot \|\vec{u}\|}{\cancel{t}} \cdot \eta(t\vec{u}) \end{aligned}$$

$$= (d_a f)(\vec{u}) + \|\vec{u}\| \cdot \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0} \eta(t\vec{u})}_{=0}$$

$$= (d_a f)(\vec{u})$$

Um resumo:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \left(\frac{df}{da} \right) (\vec{u})}$$

□

Obs.: Como $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, então

$$\left[\frac{df}{da} \right]_{1 \times m} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_m} \right]_{1 \times m}$$

Isto inspira definições e seguintes conceitos:

Def.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar.

Definimos o vetor gradiente de f por:

$$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right)$$

Exemplo: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z$.

Neste caso, o vetor gradiente de f será:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (2xy, x^2 + 2yz, y^2)$$

Com esse conceito, podemos "melhorar" o teorema mostrado acima na seguinte coerência:

COERÊNCIA: Seja $f: \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $a \in \text{int}(\mathbb{R})$ e $\vec{u}$ um vetor unitário, então:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \nabla f(a) \cdot \vec{u}.$$

PRODUTO ESCALAR.

DEMONSTRAÇÃO:

De fato, basta observar que; sendo $f: \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, e $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$; com $\|\vec{u}\| = 1$, então:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \left(\underset{1 \times m}{\frac{df}{da}} \right) \cdot \vec{u} = \left[\underset{1 \times m}{\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \dots \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)} \right] \cdot \underset{m \times 1}{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \cdot u_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \cdot u_m = \\ & = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \right) \cdot (u_1, u_2, \dots, u_m) \end{aligned}$$

$$= \nabla f(a) \cdot \vec{u}.$$

□

Exemplo: Retomando o exemplo do início da aula, tenhamos: $f(x, y) = x^2 y$; $\vec{u} = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$; então:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2, 3) = \nabla f(2, 3) \cdot \vec{u}; \text{ onde:}$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (2xy, x^2)$$

$$\Rightarrow \nabla f(2, 3) = (2 \cdot (2) \cdot (3), (2)^2) = (12, 4)$$

Então:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2, 3) = \nabla f(2, 3) \cdot \vec{u} = (12, 4) \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -6 + 2\sqrt{3}$$

$$= \underline{\underline{2\sqrt{3} - 6}}$$

Obs.: Derivadas correspondem a taxas de variação. Em particular $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a)$ também expressa uma taxa de variação, conforme o seguinte resultado:

TEOREMA: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável e $a \in \text{int}(\Omega)$. Então, dado $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ com $\|\vec{u}\|=1$, a máxima taxa de variação de f se dá em $\nabla f(a)$ e será máxima na direção vetor unitário $\vec{u}$, e seu valor será $\|\nabla f(a)\|$.

DEMONSTRAÇÃO: Note que:

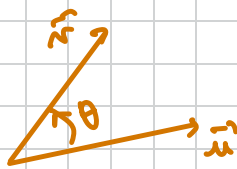
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \nabla f(a) \cdot \vec{u}.$$

Obs.: Lembrando de GEOMETRIA ANALÍTICA o resultado:

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$; então

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta. \text{ onde } \theta \text{ é}$$

o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$:



Seja obs acima, temos:

$$\frac{df}{d\vec{u}}(a) = \nabla f(a) \cdot \vec{u} = \|\nabla f(a)\| \cdot \underbrace{\|\vec{u}\|}_{=1} \cdot \cos \theta.$$

$$= \|\nabla f(a)\| \cdot \cos \theta; \text{ e como}$$

$-1 \leq \cos \theta \leq 1$, o seu valor será
máximo quando $\cos \theta = 1$, e então:

$$\frac{df}{d\vec{u}}(a) = \|\nabla f(a)\| \cdot 1, \text{ e nesse caso,}$$

$\theta = 0^\circ$, ou seja, $\nabla f(a)$ fica paralelo ao vetor $\vec{u}$.

□

EXERCÍCIO (STEWART, VOL 2). Seja $f(x, y) = x \cdot e^y$.

(a) Determine a taxa de variação de f no ponto $P(2, 0)$, na direção de P até $Q(\frac{1}{2}, 2)$.

(b) Em que direção f tem a máxima taxa de variação? Qual é essa máxima taxa de variação?

SOLUÇÃO:

(a) A taxa de variação será $\frac{1}{2} - \frac{4}{5}$
 $\frac{df}{d\vec{u}}(P)$; onde

$$\vec{PQ} = Q - P = (\frac{1}{2}, 2) - (2, 0) = (-\frac{3}{2}, 2)$$

$$\|\vec{PQ}\| = \sqrt{(-\frac{3}{2})^2 + (2)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \frac{\vec{PQ}}{\|\vec{PQ}\|} = \frac{2}{5} \cdot (-\frac{3}{2}, 2) = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$$

Assim, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(p) = \nabla f(p) \cdot \vec{u} \quad , \text{ onde; sendo}$$

$$f(x,y) = x \cdot e^y, \text{ então:}$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (e^y, x \cdot e^y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(p) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2,0) = \nabla f(2,0) \cdot \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

$$= (e^0, 2 \cdot e^0) \cdot \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) =$$

$$= (1, 2) \cdot \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) =$$

$$= -\frac{3}{5} + 2 \cdot \left(\frac{4}{5} \right) = -\frac{3}{5} + \frac{8}{5} = \underline{\underline{1}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(p) = 1}}$$

(b) Na mesma direção que $\nabla f(p)$, e
seu

$$\| \nabla f(p) \| = \| (e^0, 2 \cdot e^0) \| = \| (1, 2) \| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$$