

Na aula passada iniciamos o estudo de diferenciabilidade no $\mathbb{R}^m$. Dada $f: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, dizemos que f é diferenciável em $a \in \text{int}(\mathcal{D})$ se $\exists L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ transformação linear tal que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

Neste caso, $L = df_a$ e é chamada de diferencial de f no ponto a .

Na base canônica do $\mathbb{R}^m$, dada $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, onde cada $f_i: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, vemos que a representação matricial para a diferencial de f no ponto a é:

$$df_a = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nm} \end{bmatrix},$$

$n \times m$

chamada de MATRIZ JACOBIANA DA f no ponto a ,

onde $f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

Obs: Outra notação para a matriz jacobiana de f em a seria:

$$df_a = J(f)(a).$$

Ex: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $f(x, y, z) = (\overbrace{x^2+y^2+z^2}^{f_1}, \overbrace{z+\cos xy}^{f_2})$
 calcule df_a e, em seguida, $df(1, 0, 2)$.

Solução: Como $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, então a matriz

$$\left[df_a \right]_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3};$$

onde $f_1 = x^2 + y^2 + z^2$ e $f_2 = z + \cos(xy)$

Assim:

$$f_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2) = 2x$$

$$f_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2) = 2y$$

$$f_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{2}{2z} (x^2 + y^2 + z^2) = 2z$$

$$f_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{2}{2x} (z + \cos xy) = -\sin(xy) \cdot y$$

$$f_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{2}{2y} (z + \cos xy) = 0 - \sin(xy) \cdot x$$

$$f_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{2}{2z} (z + \cos xy) = 1.$$

Answer:

$$\frac{df}{a} = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ -y \cdot \sin xy & -x \cdot \sin xy & 1 \end{bmatrix}.$$

So for:

$$\frac{df}{a} (1, 0, 2) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ -y \sin xy & -x \sin xy & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1, 0, 2) \\ \uparrow \uparrow \uparrow \\ x \ y \ z \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 2 \cdot 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

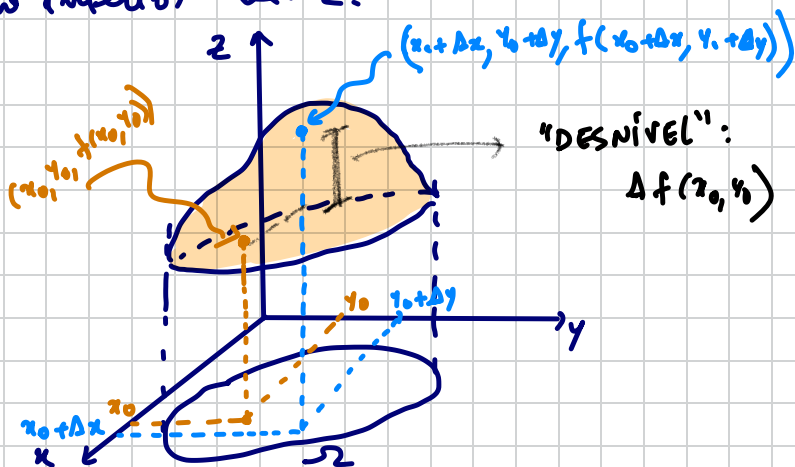
INCREMENTO DE UMA FUNÇÃO:

Def.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $a \in \text{int}(\Omega)$.

Dado $h \in \mathbb{R}^m$ tal que $a+h \in \text{int}(\Omega)$, definiremos o incremento de f no ponto a , e escrevemos $\Delta f(a)$, por:

$$\Delta f(a) = f(a+h) - f(a) \quad (\text{DESNÍVEL})$$

No caso quando tivermos $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (função escalar a duas variáveis reais), podemos dar uma interpretação geométrica para o incremento de uma função como segue: tome $a = (x_0, y_0) \in \text{int}(\Omega)$ e seja $h = (\Delta x, \Delta y)$ tal que $a+h = (x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ fique no interior de Ω .



$$\Delta f(x_0, y_0) = \underbrace{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)}_{a+h} - \underbrace{f(x_0, y_0)}_a$$

$$f(a+h) - f(a)$$

Em frente a este conceito de incremento, para funções escalares do $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}$, o conceito de diferenciabilidade tornar-se-á bem mais simples:

Def: Seja $f: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ função escalar.

Dizemos que f é diferenciável em um ponto $a \in \text{int}(\mathcal{U})$ se, pondo $h \in \mathbb{R}^m$, $h = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ tal que $a+h \in \text{int}(\mathcal{U})$, o diferencial de f em a pode ser representado por:

$$\Delta f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) h_2 + \dots +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) h_m + \varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2 + \dots + \varepsilon_m h_m,$$

$$\text{onde } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_i = 0$$

Obs.: Esta definição é, na verdade, exatamente o resultado mostrado na aula passada, aplicado para funções reais; e reescrito de uma forma adequada.

$$\text{De fato, sendo } f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \\ f(x, y); \quad \text{e } h = (\Delta x, \Delta y);$$

$$a = (x_0, y_0). \quad \text{Então, } a + h = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$$

Diz-se, f sendo diferenciável no ponto a ,
então:

$$f(x) = f(a) + d_a f(x-a) + \|x-a\| \cdot \eta(x-a),$$

$$\text{com } \frac{\eta(x-a)}{\|x-a\|} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

Como $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, a matriz $d_a f$ será 1×2 ,
ou seja:

$$\left[\frac{df}{da} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}_{1 \times 2} (a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) & \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{bmatrix}_{1 \times 2}$$

Escrevendo $h = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$ vetor coluna,
temos; sendo $x - a = h$, e então
 $x = a + h$.

$$f(x) = f(a) + \frac{df}{da}(x-a) + \|x-a\| \cdot r(x-a)$$

$$f(a+h) = f(a) + \frac{df}{da}(h) + \|h\| \cdot r(h)$$

$$\underbrace{f(a+h) - f(a)}_{\Delta f(a)} = \frac{df}{da}(h) + \|h\| \cdot r(h) ;$$

e então:

$$\Delta f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) & \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{bmatrix}_{1 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}_{2 \times 1} + \|h\| \cdot r(h)$$

↑
PRODUTO DE MATRIZES

$$h = (\Delta x, \Delta y) \Rightarrow \|h\|_1 = |\Delta x| + |\Delta y|$$

Tomando $\Delta x, \Delta y > 0$; teremos

$$\|h\| = \Delta x + \Delta y ; \text{ e assim:}$$

$$\Delta f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot \Delta y + (\Delta x + \Delta y) \cdot r(h)$$

$$\Rightarrow \Delta f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot \Delta y + \underbrace{\Delta x \cdot r(h)}_{\varepsilon_1(h)} + \underbrace{\Delta y \cdot r(h)}_{\varepsilon_2(h)}$$

PROPOSIÇÃO: $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável se

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ forem contínuas.

DEMONSTRAR: Veja o LEITHOLD, Vol 2.

Logo encerramos esta parte, respondemos ao problema que motivou este estudo.

PROPOSIÇÃO: Se uma função $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ for diferenciável em $a \in \text{int}(\Omega)$, então f é contínua nesse ponto.

DEMONSTRAÇÃO: De fato, basta notar que, sendo f diferenciável em $a \in \text{int}(\Omega)$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(a) + \overset{L}{\underbrace{df(x-a)}_{=f(a)}} + \|x-a\| \cdot \eta(x-a)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} L(x-a) + \lim_{x \rightarrow a} \|x-a\| \cdot \eta(x-a)$$

$$= \underbrace{L(0)}_{0''} + \underbrace{\|0\| \cdot \eta(0)}_{=0} = \underbrace{f(a)}$$

$0'' \leftarrow$ pois L é transf. linear

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) ; \text{ ou seja, } f \text{ é cont. em } a.$$

□

Def. Seja $f: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar.

Definimos o diferencial total de f em a por:

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \cdot h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \cdot h_m$$

obs.: Se f é diferenciável em a :

$$\underbrace{\Delta f(a)}_{\text{INCREMENTO}} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)h_m}_{\substack{\text{DIF. TOTAL:} \\ df(a)}} + \underbrace{\varepsilon_1 h_1 + \dots + \varepsilon_m h_m}_{\text{RESTO}}$$

$\downarrow$
 $df(a)$

Em duas variáveis;

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

Então,

$$\Delta f(a) = df(a) + \underbrace{o(\varepsilon_i, h)}_{\text{RESTO}}$$

$$\Rightarrow df(a) \approx \Delta f(a)$$

Da mesma forma que se fez no Cálculo 1, o incremento na variável independente x , Δx , se iguala ao diferencial dx , temos:

$$\Delta x = dx \quad \text{e} \quad \Delta y = dy.$$

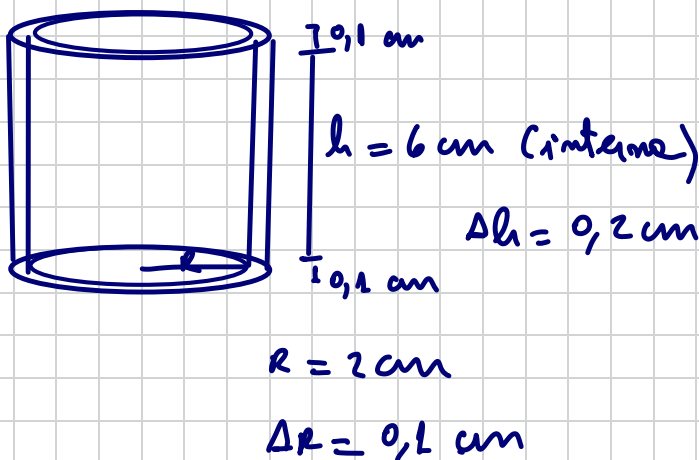
Analogamente, o diferencial total de uma função em $\mathbb{R}^2$ fica:

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot dy$$

Exemplo: Um recipiente de metal, fechado, na forma de um cilindro circular reto, tem uma altura interna de 6 cm, um raio interno de 2 cm e uma espessura de 0,1 cm. Se o custo de material a ser usado for de R\$ 10,00 por cm^3 , adoe por diferenciação o custo aproximado do metal que

será usado na produção do recipiente.

Solução:



$$V = A_b \cdot h$$

$$\boxed{V = \pi R^2 \cdot h} \Rightarrow V = V(R, h)$$

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial R} \cdot \Delta R + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \Delta h ; \text{ onde:}$$

$$\frac{\partial V}{\partial R} = 2\pi R \cdot h ; \quad \frac{\partial V}{\partial h} = \pi R^2$$

$$\Rightarrow \Delta V \approx 2\pi R h \cdot \Delta R + \pi R^2 \cdot \Delta h$$

$$\Delta V \Big|_{\substack{R=2; h=6 \\ \Delta R=0,1; \Delta h=0,2}} \approx 2\pi \cdot 2 \cdot 6 \cdot 0,1 + \pi (2)^2 \cdot 0,2$$

$$\Delta V \approx \frac{24\pi}{10} + \frac{8\pi}{10} \text{ cm}^3$$

$$\Delta V \approx \frac{32\pi}{10} \text{ cm}^3 = 3,2\pi \text{ cm}^3$$

Como cada cm^3 custa R\$10,00, então o custo será:

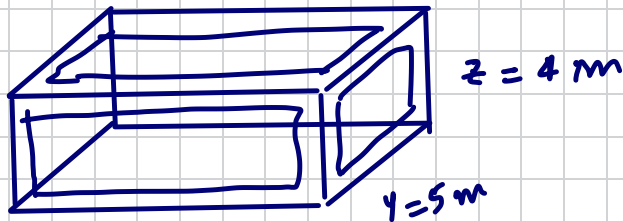
$$C \approx 10 \times \Delta V = 10 \cdot 3,2\pi$$

$$= \underline{\underline{32\pi \text{ reais}}}$$

02) (LEITHOLD, Pág 949) - 3ª ed.

35) Um recipiente fechado na forma de um sólido retangular deve ter comprimento interno de 8m, uma largura interna de 5m, uma altura 4m e espessura de 4cm. Use diferenciais para aproximar a quantidade de material necessário para construir o recipiente.

SOLUCÃO:



$$\hookrightarrow x = 8 \text{ m}$$

$$\Delta x = 0,04 + 0,04 = 0,08 \text{ m}$$

$$\Delta y = 0,08 \text{ m} ; \Delta z = 0,08 \text{ m}.$$

$$V = x \cdot y \cdot z$$

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \Delta z,$$

$$\text{onde: } \frac{\partial V}{\partial x} = yz ; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = xz \quad \text{e} \quad \frac{\partial V}{\partial z} = xy$$

$$\Rightarrow \Delta V \approx \left(yz \Delta x + xz \cdot \Delta y + xy \cdot \Delta z \right) \Bigg|_{\substack{x=8 \\ y=5; z=4 \\ \Delta x=\Delta y=\Delta z=0,08}}$$

$$= 5 \cdot 4 \cdot 0,08 + 8 \cdot 4 \cdot 0,08 + 8 \cdot 5 \cdot 0,08 =$$

$$= 0,08 \cdot (20 + 32 + 40)$$

$$= \frac{8}{100} \cdot (92) = \frac{736}{100}$$

$$= 7,36 \text{ m}^3$$

Resp: $\boxed{V \approx 7,36 \text{ m}^3}$

