

DIFERENCIABILIDADE NO $\mathbb{R}^m$

No cálculo, vimos o importante resultado:

PROP.: Se $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função derivável em (a,b) , então f' é contínua nesse intervalo.

A questão que levantamos aqui é: será que a mais recente este resultado permanece válido?

Por exemplo; veja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Note que f não é contínua na origem, pois:

$$\bullet \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = \underline{\underline{0}}.$$





$$\bullet \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Logo, por caminhos diferentes obtemos limites diferentes, o que mostra que $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$, e isso segue que f não é contínua na origem.

Logo, ao calcular as derivadas parciais de f na origem, vamos obter:

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} =$$

[ESTAMOS DERIVANDO POR DEF. POIS EXATAMENTE NA ORIGEM A FUNÇÃO MUDA DE SENTENÇA.]

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(h,0) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0}{h^2 + 0^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0};$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0,0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot h}{0^2 + h^2}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0} \end{aligned}$$

conclusão: f não é contínua em $(0,0)$,
mas $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Então, esta conclusão parece contradizer o resultado do cálculo 1 lembrado anteriormente.

(f derivável $\Rightarrow f$ contínua; logo, por
TRANSPOSIÇÃO: f não é cont $\Rightarrow f$ não é deriv.)

Toum, o que obtemos acima foi uma comparação envolvendo continuidade e derivada parcial, não entre continuidade e derivada, como no cálculo.

⊙ que se estuda a várias variáveis, e entre o resultado enunciado de cálculo 1 continuará valendo, e o conceito de DIFERENCIABILIDADE.

Lembremos do cálculo:

Def.: Dizemos que uma função $f: X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em um ponto $a \in \text{int}(X)$ se $\exists L \in \mathbb{R}$ tal que, tendo

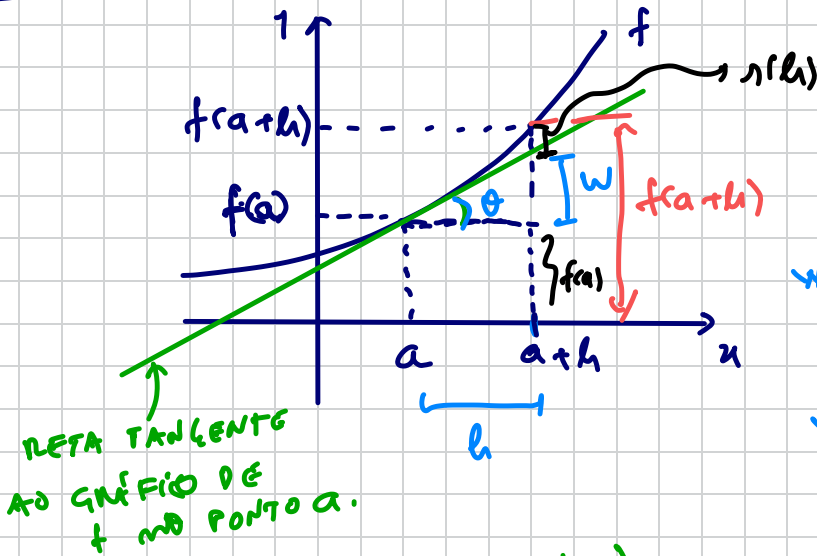
$$f(a+h) = f(a) + L \cdot h + o(h),$$

tivermos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0.$$

Neste caso, escrevemos $L = f'(a)$.

obs: $\eta(h)$ chrome-re RFTO del.



$$\tan \theta = \frac{w}{h}$$

$$w = \frac{\tan \theta \cdot h}{f'(a)}$$

$$w = f'(a) \cdot h$$

a inclinação dessa reta é $f'(a)$

Pelo esquema desenhado acima, temos:

$$f(a+h) = f(a) + w + r(h)$$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + r(h) \quad ; \text{ onde}$$

$\gamma(h) \rightarrow 0$ mais rápido que $h \rightarrow 0$.

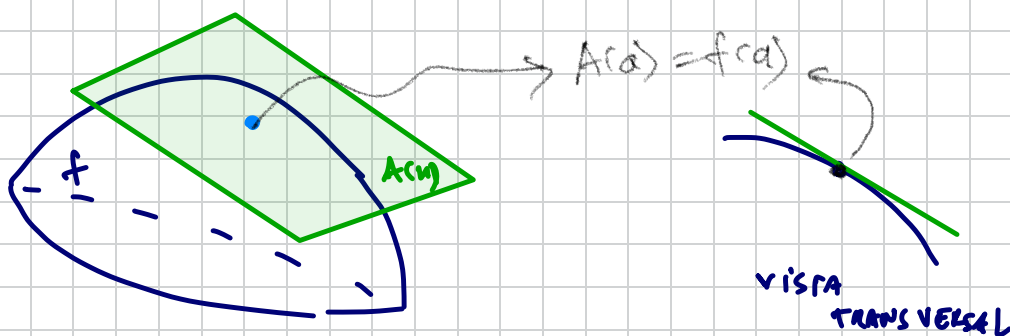
ou seja, $\frac{n(h)}{h} \rightarrow 0$ $h \rightarrow 0$

Neste caso, definiremos o diferencial de f no ponto a por:

$$df(a) = f'(a) \cdot h.$$

Nosso objetivo é entender/adaptar esta definição para mais variáveis.

Dado $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de várias variáveis reais, e $a \in \text{int}(\Omega)$, queremos encontrar uma aproximação linear $A(x)$ de f , tal que devemos impor que $A(a) = f(a)$



E, numa vizinhança do ponto a , devemos ter $A(x) \approx f(x)$.

A aproximação $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ deve ser dada por

$$A(x) = L(x) + b,$$

onde $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear e $b \in \mathbb{R}^n$

Note que:

$$\lim_{x \rightarrow a} A(x) - A(a) = \lim_{x \rightarrow a} L(x) + b - (L(a) + b)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} L(x) + \cancel{b} - L(a) - \cancel{b}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} L(x) - L(a) = \lim_{x \rightarrow a} L(x-a) =$$

pois L é transf. linear

$$= L(a-a) = L(0) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} A(x) - A(a) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} A(x) = \underline{A(a)}$$

o que mostra que A é contínua em a .

Dessa forma, redefina a $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ sendo:

$$f(x) = f(a) + L(x-a) + \|x-a\| \cdot r(x-a);$$

$$\text{onde } \|x-a\| = d(x,a) ; \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

Note que:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} f(a) + \lim_{x \rightarrow a} L(x-a) + \lim_{x \rightarrow a} \|x-a\| \cdot r(x-a) \\ &= f(a) + L(0) + 0 \\ &= f(a)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad , \text{ ou seja } f \text{ é}$$

contínua em $x=a$.

Em frente ao exposto acima, definimos:

Def. Dizemos que $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável em um ponto $a \in \text{int}(\Omega)$ se $\exists L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ transformação linear tal que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

obs.: Isso provém do seguinte: sendo

$$f(x) = f(a) + L(x-a) + \|x-a\| \cdot r(x-a),$$

então isolando $r(x-a)$, vem:

$$r(x-a) = \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^m$.

ou seja, $e_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$,
↳ na posição j .

e tome $t > 0$ tal que

$$x_i = a + t \cdot e_i \in \text{int}(\Omega).$$

Agora; supondo f diferenciável no ponto a ,
então:

$$\lim_{x_i \rightarrow a} \frac{f(x_i) - f(a) - L(x_i - a)}{\|x_i - a\|} = 0$$

$$\lim_{x_i \rightarrow a} \frac{f(x_i) - f(a)}{\|x_i - a\|} = \lim_{x_i \rightarrow a} \frac{L(x_i - a)}{\|x_i - a\|} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x_i \rightarrow a} \frac{f(x_i) - f(a)}{\|x_i - a\|} = \lim_{x_i \rightarrow a} \frac{L(x_i - a)}{\|x_i - a\|} \quad (*)$$

e sendo $x_i = a + t \cdot e_i$; $t > 0$; então:

$$\begin{aligned}\|x_i - a\| &= \|\cancel{a} + t \cdot \cancel{e_i} - \cancel{a}\| = \\ &= \|t \cdot e_i\| = \underbrace{|t|}_1 \cdot \underbrace{\|e_i\|}_1 = t.\end{aligned}$$

Além disso, como $x_i = a + t \cdot e_i$,
então $t \rightarrow 0$ quando $x_i \rightarrow a$.

Assim, (*) fica:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t e_i) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(\cancel{a} + t \cdot \cancel{e_i} - \cancel{a})}{t}$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

pois L é transf. linear.

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(t \cdot e_i)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \cancel{t} \cdot \frac{L(e_i)}{\cancel{t}} = L(e_i)$$

$$\text{Portanto, } \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = L(e_i) := df_a(e_i)$$

(Diferencial de f
no ponto a
aplicada no
vetor e_i .)

Desse forma, seja $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

Então, $df_a(e_i)$ fornece um
vetor que guarda as derivadas parciais:

$$df_a(e_1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) \end{bmatrix} ;$$

$m \times 1$

$$df_a(e_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) \end{bmatrix} \quad (\dots)$$

$m \times 1$

Assim, tomando todas as derivadas
altadas, montamos a matriz

$$df(a) = \left[\underbrace{df_a(e_1)}_{n \times 1} \quad \underbrace{df_a(e_2)}_{n \times 1} \quad \dots \quad \underbrace{df_a(e_m)}_{n \times 1} \right] \quad m \times m$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(a) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(a) \end{bmatrix} \quad m \times m$$

que é a representação matricial de
 $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

Uma forma mais simples de representar essa matriz é usando a notação:

$$df_a = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \dots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \dots & f_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{n3} & \dots & f_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m},$$

chamada de MATRIZ JACOBIANA DE f .

O que fizemos acima constitui a prova do seguinte resultado:

TEOREMA: Uma função $f: \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $a \in \text{int}(\mathcal{R})$ se, e só se, $\exists L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ transf. linear tal que a sua representação matricial é dada pela matriz jacobiana construída acima, e essa representação é única. (nas bases canônicas)