

CÁLCULO 3:

11/09/26 - AULA 13

DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
uma função escalar. Definimos as derivadas parciais
de segunda ordem por:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) ;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) ;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) ;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

DERIVADAS MISTAS

;

se existirem.

Obs.: Este conceito, embora enunciado para funções
de duas variáveis reais, amplia-se para mais
variáveis.

Exemplos:

01) $f(x, y) = x^2 y + \sin(xy)$.

Obter $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Solução: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \cos(xy) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(xy)$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y \cdot \cos(xy)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2xy + y \cdot \cos(xy))$$

$$= 2y + y \cdot (-\sin(xy) \cdot y)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y - y^2 \cdot \sin(xy)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2xy + y \cdot \cos(xy))$$

$$= 2x + y \cdot (-\sin(xy) \cdot x) + 1 \cdot \cos(xy)$$

$$= 2x - xy \cdot \sin(xy) + \cos(xy)$$

$(u \cdot v)' = u'v + uv'$

Resposta: $f(x,y) = x^2y + \sin(xy)$.

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \cos(xy) \cdot x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + x \cdot \cos(xy)) =$$

$$= 0 + x \cdot (-\sin(xy) \cdot x)$$

$$= \underline{-x^2 \cdot \sin(xy)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + \overbrace{x \cdot \cos(xy)}^{x \cdot r})$$

$$= 2x + x \cdot (-\sin(xy) \cdot y) + 1 \cdot \cos(xy)$$

$$= 2x - xy \cdot \sin(xy) + \cos(xy)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x - xy \cdot \sin(xy) + \cos(xy)}$$

Note que já tínhamos calculado a segunda derivada mista:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x - xy \cdot \sin(xy) + \cos(xy).$$

Notamos que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

e isto não é uma "feliz coincidência"; é uma propriedade, conforme o teorema abaixo.

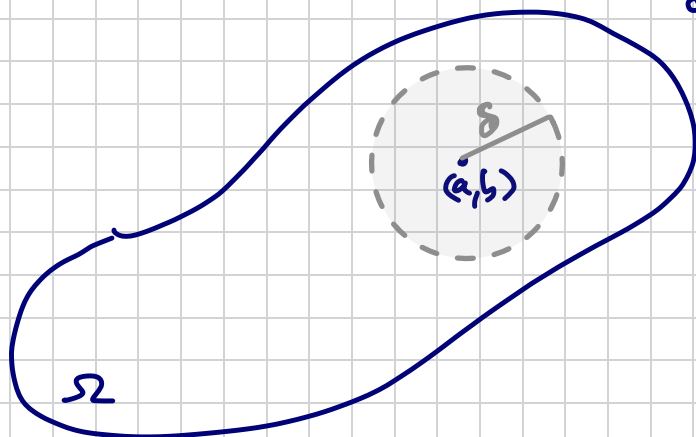
TEOREMA DE SCHWARZ: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, possuindo derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ contínuas numa}$$

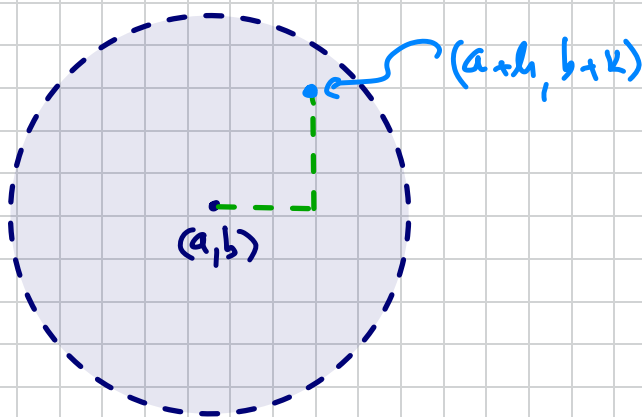
vizinhança de um ponto $(a, b) \in \text{int}(\Omega)$. Então,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$$

DEMONSTR.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ nas hipóteses do teorema. Seja $\delta > 0$ e tome $B(a,b) \subset \text{int}(\Omega)$.



Tome $h, k \in \mathbb{R}$ tais que $(a+h, b+k) \in \text{int} B_\delta(a,b)$.



Defina $g: [a, a+h] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = f(x, b+k) - f(x, b), \quad (1)$$

Note que g é contínua e derivável, por hipótese, pois f o é.

Então, então, nos hipóteses da teorema do
valor médio (*) (T.V.M.). Então, $\exists c$ entre a e $a+h$
 tal que

$$g(a+h) - g(a) = g'(c) \cdot (a+h-a)$$

$$g(a+h) - g(a) = g'(c) \cdot h.$$

Note que $g(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$

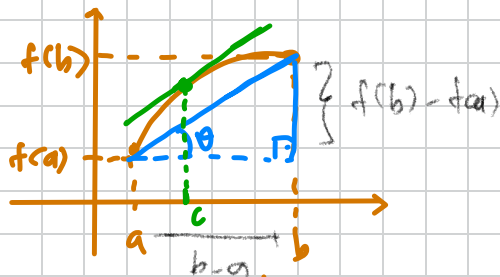
$$\Rightarrow g'(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, b+k) - \frac{\partial}{\partial x} f(x, b)$$

Analogamente, teremos:

(*) T.V.M.: Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua
 em $[a, b]$ e derivável em (a, b) . Então, $\exists c \in (a, b)$,
 tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

$$\tan \theta = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

$\Downarrow$



ou seja, vai existir um ponto c entre a e b tal que a
 inclinação da reta tangente ao gráfico neste ponto fica paralela
 à reta secante, ligando as extremidades (reta em azul)

$$g(a+h) - g(a) = g'(c_0) \cdot h$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} f(c_0, b+k) - \frac{\partial}{\partial x} f(c_0, b) \right) \cdot h. \quad (II)$$

Defina $u(y)$ por

$$u(y) = \frac{\partial}{\partial x} f(c_0, y); \text{ com}$$

$$y \in [b, b+k].$$

Sejam que u também é cont. e derivável, em $(b, b+k)$. Estamos novamente nas hipóteses do T.V.M. Assim, $\exists d_0$ entre b e $b+k$ tal que

$$u(b+k) - u(b) = u'(d_0) \cdot (\cancel{b+k} - \cancel{b})$$

$$\Rightarrow u(b+k) - u(b) = u'(d_0) \cdot k, \text{ onde:}$$

$$u(y) = \frac{\partial}{\partial x} f(c_0, y)$$

$$\Rightarrow u'(y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(c_0, y) \right); \text{ logo;}$$

$$\boxed{u'(d_0) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(c_0, d_0)} \quad (\text{III})$$

Dimo, temos; observando (I), (II) e (III) :

$$g(a+h) - g(a) = \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} f(c_0, b+k)}_{u(b+k)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} f(c_0, b)}_{u(b)} \right) \cdot h =$$

$$= u(b+k) - u(b) = u'(d_0) \cdot k \cdot h$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(c_0, d_0) \cdot k \cdot h$$

$$\Rightarrow \underbrace{g(a+h) - g(a)}_{\text{"}} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(c_0, d_0) \cdot k \cdot h$$

$$f(a+h, b+k) - f(a+h, b)$$

$$f(a, b+k) - f(a, b)$$

$$\Rightarrow f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(c_0, d_0) \cdot k \cdot h$$

Dividindo por $K \neq 0$, obtemos:

$$\frac{f(a+h, b+K) - f(a+h, b)}{K} - \frac{f(a, b+K) - f(a, b)}{K} =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(c_0, d_0) \cdot h.$$

Como c_0 está entre a e $a+h$, $\exists \theta_1 \in [0, 1]$
tal que $c_0 = a + \theta_1 \cdot h$



Da mesma forma, como d_0 está entre
 b e $b+K$, então $\exists \theta_2 \in [0, 1]$ tal que
 $d_0 = b + \theta_2 \cdot K.$



Então, encontramos:

$$\frac{f(a+h, b+K) - f(a+h, b)}{K} - \frac{f(a, b+K) - f(a, b)}{K} =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(a + \theta_1 h, b + \theta_2 K) \cdot h$$

Segundo $h \rightarrow 0$, temos, no limite:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(a+h, b) - \frac{\partial}{\partial y} f(a, b) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(a+0, h, b) \cdot h$$

Dividindo por $h \neq 0$, obtemos:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial y} f(a+h, b) - \frac{\partial}{\partial y} f(a, b)}{h} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(a+0, h, b)$$

Tomando o limite com $h \rightarrow 0$, vamos obter:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(a, b) \right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(a, b)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(a, b)$$

□



Ex: $f(x, y, z) = x^2 y^3 + x z^2.$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = ?$$

Solução: $\cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (3x^2 y^2 + 0) = \underline{\underline{0}}$

$$\cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2xz) = \underline{\underline{0}}$$

obs: Embora enunciado e provado para funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, o teorema de SCHWARZ vale para funções de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}$.

obs.: Analogamente definiremos derivadas mais altas de uma função a várias variáveis.

Seu exemplo: $w = f(x, y, z).$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) ;$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial z \partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \right)$$

Outras notações para derivação parcial:

$$\bullet \quad \frac{\partial f}{\partial x} = D_x f = f_x = f_1$$

↳ DERIVA NA 1ª VARIÁVEL.

$$\bullet \quad \frac{\partial f}{\partial y} = D_y f = f_y = f_2$$

↳ DERIVA NA 2ª VARIÁVEL.

$$\bullet \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = D_x^2 f = f_{xx} = f_{11}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = D_y^2 f = f_{yy} = f_{22}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = D_{yx} f = f_{yx} = f_{21}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = D_{xy} f = f_{xy} = f_{12}$$



Def.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais contínuas até a segunda ordem.

Definimos o Laplaciano de f por:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Para função $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ definimos de forma análoga: sendo $f = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$;
então

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} = \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\end{aligned}$$

Dizemos que uma função $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é harmônica quando $\Delta f = 0$.

Ex.: A função $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ é harmônica?

Solução: Precisamos verificar se $\Delta f = 0$.

$$y = \ln r \Rightarrow y' = \frac{1}{r}$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u \cdot v' - u' \cdot v}{v^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\overbrace{(x^2+y^2)} \cdot 2 - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{2x^1 + 2y^2 - 4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x^2 + 2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\overbrace{(x^2+y^2)} \cdot 2 - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 + 2y^2 - 4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Portanto,

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2x^2 + 2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{-\cancel{2x^2} + \cancel{2y^2} + \cancel{2x^2} - \cancel{2y^2}}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

$\Rightarrow \Delta f = 0$; logo, f é harmônica.