

No final da aula passaremos a estudar derivadas de funções vetoriais a uma variável real.

Seja $\vec{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$$\vec{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t)),$$

definimos a função derivada $\vec{f}': (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ por:

$$\vec{f}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h}.$$

Encerramos a aula com um exemplo; onde foi dada $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{f}(t) = (t^2 + t, 3t)$; mostramos, pela def. acima, que

$$\vec{f}'(t) = (2t + 1, 3)$$

Observamos, neste exemplo que

$$\vec{f}'(t) = (f_1'(t), f_2'(t)); \text{ e isso não}$$

é coincidência, é um resultado:

PROPOSIÇÃO: Seja $\vec{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t))$$

derivável. Então:

$$\vec{f}'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), \dots, f_m'(t))$$

DEMONSTRA: De fato:

$$\vec{f}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot (\underbrace{\vec{f}(t+h)} - \underbrace{\vec{f}(t)}) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\underbrace{(f_1(t+h), f_2(t+h), \dots, f_m(t+h))}_{\text{green}} - \underbrace{(f_1(t), \dots, f_m(t))}_{\text{blue}} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot (f_1(t+h) - f_1(t), f_2(t+h) - f_2(t), \dots, f_m(t+h) - f_m(t))$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f_1(t+h) - f_1(t)}{h}, \frac{f_2(t+h) - f_2(t)}{h}, \dots, \frac{f_m(t+h) - f_m(t)}{h} \right)$$

$$= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(t+h) - f_1(t)}{h}, \dots, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_m(t+h) - f_m(t)}{h} \right)$$

$$= (f_1'(t), f_2'(t), \dots, f_m'(t))$$

□

Ex: Dada $\vec{f}(t) = (\sin(t^3 - t), \ln(t+3), \sqrt{t})$;
calcular $\vec{f}'(t)$.

Solução: • $f_1(t) = \sin(t^3 - t)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{f_1'(t)} &= \cos(t^3 - t) \cdot (t^3 - t)' \\ &= \underline{(3t^2 - 1) \cdot \cos(t^3 - t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f_2(t) &= \ln(t+3) \Rightarrow \underline{f_2'(t)} = \frac{(t+3)'}{t+3} = \\ &= \underline{\frac{1}{t+3}} \end{aligned}$$

$$\bullet f_3(t) = t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \underline{f_3'(t)} = \frac{1}{2} \cdot t^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{t}}}}$$

Assim, obtenemos:

$$\vec{f}'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))$$

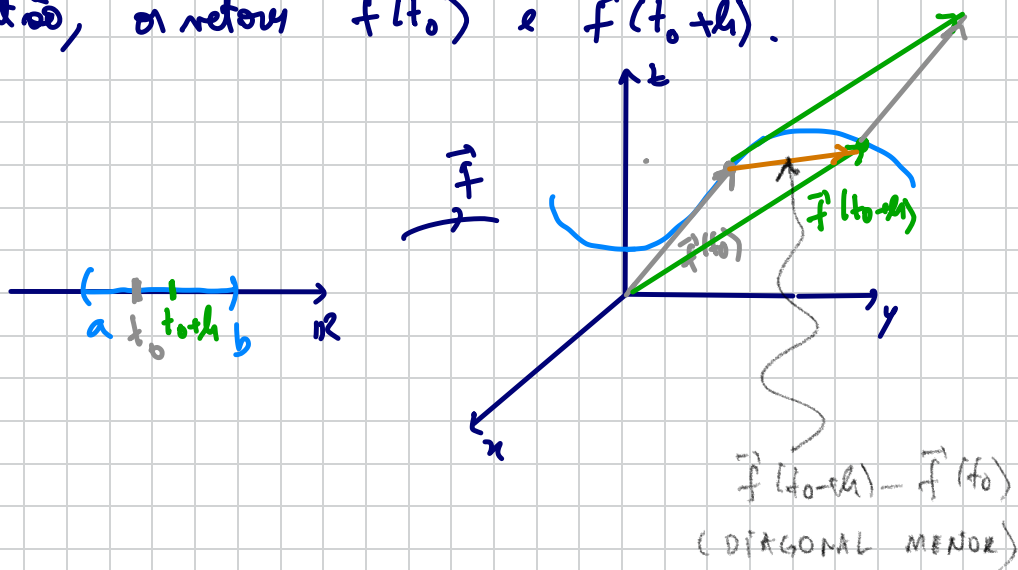
$$= \left((3t^2 - 1) \cdot \cos(t^3 - t), \frac{1}{t+3}, \frac{1}{2\sqrt{t}} \right)$$

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DA DERIVADA PARA FUNÇÕES DE $\mathbb{R}$ EM $\mathbb{R}^3$:

$$\text{Seja } \vec{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \\ = (x(t), y(t), z(t)),$$

que descreve uma curva no $\mathbb{R}^3$.

Seja t_0 um ponto no interior de $[a, b]$, e tome $h \in \mathbb{R}$ tal que $t_0 + h \in (a, b)$. Considere, então, os vetores $\vec{f}'(t_0)$ e $\vec{f}'(t_0 + h)$.

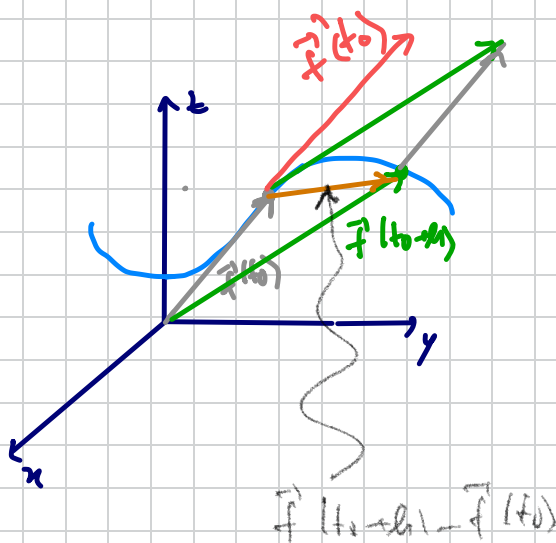


Denote por $\vec{\gamma}(t_0) = \vec{f}'(t_0+h) - \vec{f}'(t_0)$

Note que $\vec{\gamma}(t_0)$ se aproxima de um vetor tangente ao gráfico de $\vec{f}$ no ponto t_0 quando $h \rightarrow 0$.

Num processo limite,

$\frac{1}{h}(\vec{f}'(t_0+h) - \vec{f}'(t_0)) \rightarrow$ vetor tangente à $\vec{f}$ no ponto t_0 .



Outra seja; $\vec{f}''(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}'(t_0+h) - \vec{f}'(t_0)}{h}$

e é o vetor tangente à curva $\vec{f}'(t)$ no ponto t_0 .

Ex. Obtenha o vetor tangente ao gráfico de $\vec{f}(t) = (t^2, t-t^2, 2t)$ no ponto $t=1$.

Solução:

$$\vec{f}'(t) = (2t, 1-2t, 2)$$

Então, o vetor tangente em $t=1$ será $\vec{f}'(1)$:

$$\vec{f}'(1) = (2 \cdot 1, 1 - 2 \cdot 1, 2) = (2, -1, 2)$$

O vetor tangente unitário será dado por:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{f}'(1)}{\|\vec{f}'(1)\|} \quad (\text{valor de um vetor})$$

$$\|\vec{f}'(1)\| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (2)^2} =$$

$$= \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3.$$

$$\text{Então: } \vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{f}'(1)\|} \cdot \vec{f}'(1) = \frac{1}{3} \cdot (2, -1, 2)$$

$$= \vec{u}_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

~

Em funções escalares desenvolveremos o conceito de derivada parcial:

Def. Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de vários variáveis reais.

$$f: (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \mapsto f(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}.$$

Definimos a derivada de f em relação à variável

x_1 por:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_1 + h, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_m)}{h},$$

se este limite existir.

Obv. seja, $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ mantém todas as demais variáveis fixadas (constantes)

No caso de funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, usamos as notações; Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$, então:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \quad e$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},$$

se estes limites existirem.

Ex.: $f(x, y) = x^2 y$.

Obtenha $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ de duas formas:

(a) pela definição;

(b) pelas regras de derivação. (derivar como no cálculo 1, mantendo as demais variáveis fixas).

(a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\widehat{x+\Delta x})^2 \cdot y - x^2 y}{\Delta x} =$$

$f(x, y) = x^2 y$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2)}^y \cdot y - x^2 y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} y + 2x y \Delta x + y \cdot \Delta x^2 - \cancel{x^2} y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x} (2xy + y \cdot \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2xy + \underbrace{y \cdot \Delta x}_{\rightarrow 0} = \underline{2xy}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy}$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\overbrace{x^2 \cdot (y + \Delta y)}^y - x^2 y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} y + x^2 \Delta y - \cancel{x^2} y}{\Delta y}$$

$$f(x, y) = x^2 y$$

$$= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} \Delta y}{\cancel{\Delta y}} = x^2 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = x^2}$$

(b) $f(x, y) = x^2 y :$

• $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cdot y = 2xy$
↑
 $y \text{ e' constante}$

• $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 y) = x^2 \cdot 1 = x^2$
↑
 $x \text{ e' const.}$

Outro exemplo: $f(x, y, z) = x^2 y^3 + x z^2 - \sin(xy)$

Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Soluções:

• $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 y^3 + x z^2 - \sin(xy)) =$
 $= 2xy^3 + z^2 - \cos(xy) \cdot (y)$
 $= 2xy^3 + z^2 - y \cdot \cos(xy).$

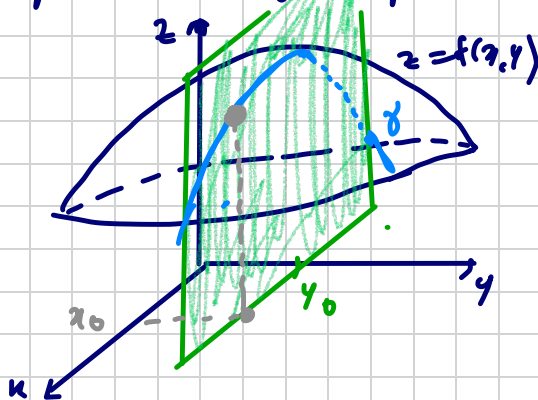
$$\begin{aligned}\underbrace{\cdot \frac{\partial f}{\partial y}} &= \frac{\partial}{\partial y} (x^2 y^3 + x z^2 - \sin(xy)) = \\ &= 3y^2 x^2 + 0 - \cos(xy) \cdot x = \\ &= \underline{3x^2 y^2 - x \cdot \cos(xy)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cdot \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} (x^2 y^3 + x z^2 - \sin(xy)) = \\ &= 0 + 2zx - 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial z} = 2xz}\end{aligned}$$

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DA DERIVADA PARCIAL PARA FUNÇÕES DE $\mathbb{R}^2$ EM $\mathbb{R}$:

Seja $z = f(x, y)$ uma função derivável em aberto Ω do $\mathbb{R}^2$. Tome $(x_0, y_0) \in \text{int}(\Omega)$.

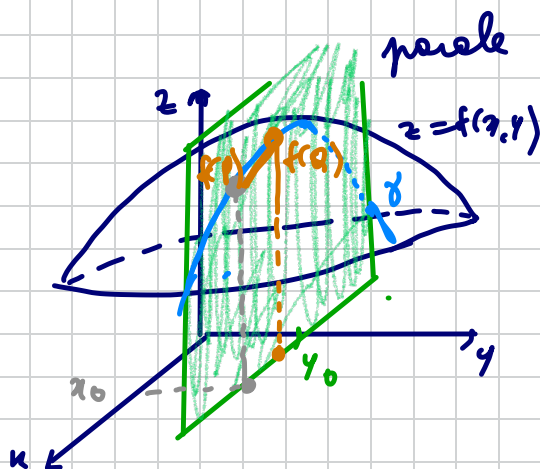
Considere o plano $y = y_0$ (paralelo ao plano xz).



O plano $y = y_0$ corta a superfície $f(x, y)$ formando uma curva γ no $\mathbb{R}^3$.

Dado $P(x_0, y_0)$, então $f(P) = f(x_0, y_0)$ fornece um ponto no espaço sobre γ . (ponto fixo)

Seja $Q(x_0 + \Delta x, y_0)$; então $f(Q) = f(x_0 + \Delta x, y_0)$ é outro ponto sobre γ .



O vetor tangente à γ em $f(P)$ será dado

por

$$\gamma'(t_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(Q) - f(P)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$$

Outroje, $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$ fornece a inclinação de
reta tangente à curva γ paralela ao plano zy ,
no ponto $f(P)$.

Analogamente para $\frac{\partial f}{\partial y}(P)$, fornecendo a
inclinação da reta tangente à curva $\tilde{\gamma}$ paralela
ao plano xz , passando pelo ponto (x_0, y_0) .