

FUNÇÕES CONTÍNUAS:

Def.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar.

Dizemos que f é contínua em $a \in \Omega$ se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tal que, $\forall x \in \Omega$:

$$x \in B_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

↑

$$d(x, a) < \delta$$

Uma forma mais simples de definir a continuidade em um ponto é escrever:

f é contínua em $a \in \Omega$ se, e só se:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Ex.: Verifique se a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada

por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é contínua na origem.

Solução: Precisamos verificar se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

Note que $f(0,0) = 0$.

Precisamos verificar se $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$.

$$\underline{\text{AF:}} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

De fato, note que, $\forall (x,y) \neq (0,0)$, temos:

$$0 \leq |f(x,y)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2 \cdot |y|}{x^2 + y^2}$$

Como $x^2 \leq x^2 + y^2$, segue que:

$$0 \leq |f(x,y)| = \frac{x^2 \cdot |y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{\cancel{(x^2 + y^2)} \cdot |y|}{\cancel{x^2 + y^2}} = |y|,$$

ou seja;

$$0 \leq |f(x,y)| \leq |y|$$

$\swarrow \quad \searrow$

$0 \quad (x,y) \rightarrow (0,0) \quad 0$

Como pelo T. do Sanduíche,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0,$$

segue que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x,y)| = 0; \quad \text{e} \quad \text{então}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0);$$

logo, f é contínua na origem.



TEOREMA DE WEIERSTRASS ou TEOR. DO VALOR EXTREMO:

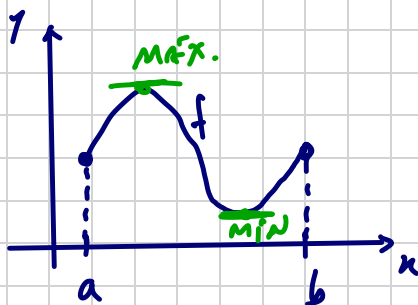
Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em Ω , sendo Ω um compacto do $\mathbb{R}^m$ (i.e., Ω é limitado e fechado). Então, f assume valores máximo e mínimo em Ω .

A demonstração desse teorema é omitida em curso de Cálculo.

□

Obs.: Esse teorema é dado no capítulo 1, na seguinte versão):

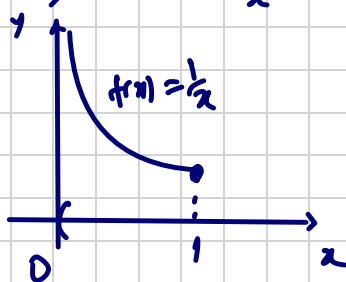
1. WEIERSTRASS (cálculo) Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua no intervalo $[a, b]$, então f assume valores máximos e mínimos em $[a, b]$.



→ neste caso a compacto é o intervalo fechado (e limitado) $[a, b]$.

A compactidade é importante, pois por exemplo:

$f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. é contínua.

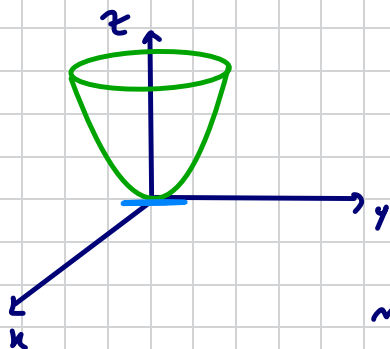


→ neste caso, f assume um mínimo, mas não assume um máximo. Isto porque $(0, 1]$ não é compacto (aberto em 0)

Um "x" perpetuo para mais revisões.

Ex. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$
(parabolóide)

f é contínua em todo o $\mathbb{R}^2$.



f assume um mínimo
em $(0,0)$ - visualmente
vemos pelo gráfico;

mas não possui máximo,
pois $\mathbb{R}^2$ não é compacto.

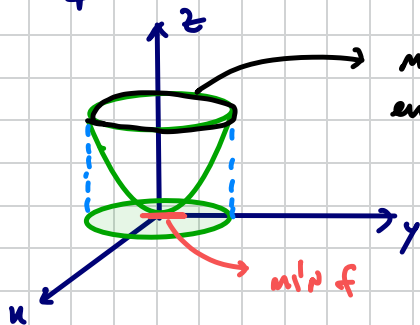
Já a função $f: \underbrace{\overline{B}_4(0)}_4 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

→ BOLA FECHADA.

Como $\overline{B}_4(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 4\}$ é

é um compacto de $\mathbb{R}^2$, segue pelo T. de
Weierstrass que f assume valores máximo e
mínimo em $\overline{B}_4(0)$:



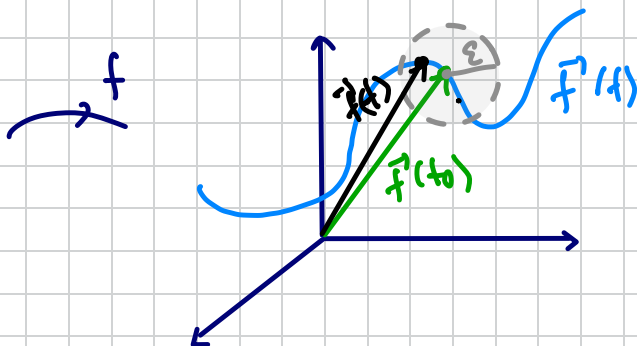
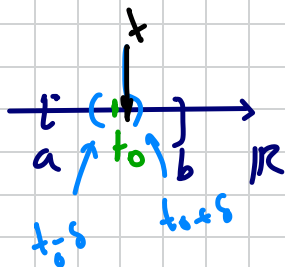
máx. de f ,
em toda circunf.
 $x^2 + y^2 = 4^2$,
 $z = 4$

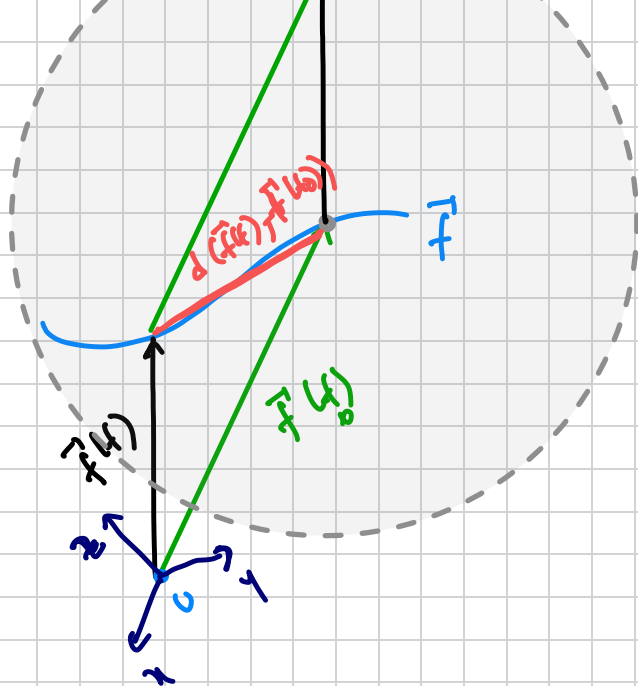
Prop.: Sejam $f, g: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas. Então, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, f/g são contínuas. A última, onde $g(x) \neq 0$.

Para funções reais de $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ também definiremos a continuidade de forma análoga:

Def.: Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função e $t_0 \in [a, b]$. Dizemos que f é contínua em t_0 se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que: $\forall t \in [a, b]$:

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow d(\vec{f}(t), \vec{f}(t_0)) < \varepsilon.$$





Do mesmo modo que feito para funções escalares, temos que $\vec{f}$ é contínua em t_0 se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}(t_0).$$

Ex: Verifique se a função $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\vec{f}(t) = \begin{cases} \left(\frac{t}{t+1}, \frac{t^2-1}{t-1} \right), & \text{se } t \neq 1 \\ \left(\frac{1}{2}, 2 \right), & \text{se } t = 1 \end{cases}$$

é contínua em $t=1$.

Solução:

Note que $\vec{f}(1) = (\frac{1}{2}, 2)$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \vec{f}(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{t}{t+1}, \frac{t^2-1}{t-1} \right), \text{ onde:}$$

$\rightarrow$  $t \neq 1$.

$$\bullet \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t}{t+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2-1}{t-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t+1)(\cancel{t-1})}{\cancel{t-1}} =$$
$$= \lim_{t \rightarrow 1} t+1 = 1+1 = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 1} \vec{f}(t) = \left(\frac{1}{2}, 2 \right) = \vec{f}(1);$$

Logo, f é contínua em $t=1$.



CAP. III - DERIVAÇÃO

DERIVADAS DE FUNÇÕES VETORIAIS A UMA VARIÁVEL REAL.

Def.: Seja $\vec{f}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ função vetorial.

Definimos a derivada de $\vec{f}$ em um ponto $t_0 \in (a, b)$ pelo limite:

$$\vec{f}'(t_0) = \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0},$$

se este limite existir.

Como $t - t_0 = h \in \mathbb{R}$, podemos escrever:

$$t = t_0 + h \text{ e então, } h \rightarrow 0 \\ t \rightarrow t_0;$$

e neste caso, a derivada em t_0 é escrita

como

$$\vec{f}'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t_0 + h) - \vec{f}(t_0)}{h}$$

Def.: Seja $\vec{f}: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em todo $t \in (a,b)$. Definimos a FUNÇÃO DERIVADA de f por

$$\vec{f}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h}.$$

Ex.: Dada $\vec{f}(t) = (t^2 + t, 3t)$, calcule a derivada $\vec{f}'(t)$.

Solução.

$$\vec{f}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((t+h)^2 + t+h, 3 \cdot (t+h)) - (t^2 + t, 3t)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot [(\underbrace{t^2 + 2th + h^2 + t + h}_{\text{blue}}, \underbrace{3t + 3h}_{\text{green}}) - (\underbrace{t^2 + t}_{\text{blue}}, \underbrace{3t}_{\text{green}})]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot [(\cancel{t^2} + 2th + \cancel{h^2} + \cancel{t} + h - \cancel{t^2} - \cancel{t}, \cancel{3t} + 3h - \cancel{3t})]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \left[(2+h+h^2+h, 3h) \right] =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{2+h+h^2+h}{h}, \frac{3h}{h} \right) =$$

$$= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2+h+h^2+h}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} \right)$$

$$= \left(\lim_{h \rightarrow 0} (2 + h + 1), \lim_{h \rightarrow 0} 3 \right) =$$

$$= (2+1, 3)$$

Resp: $\vec{f}(t) = (2+t, 3)$

Obs: Repare na resposta que a derivada coincide em calcular a derivada ordinária de cada função coordenada. E isso não foi uma "feliz" coincidência. Tem uma propriedade que mostraremos na próxima aula.