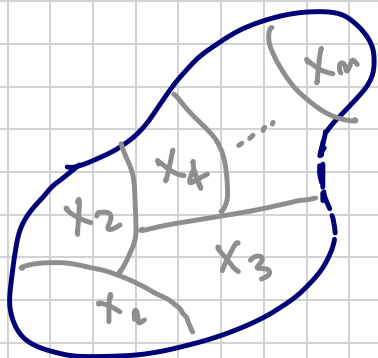


INTEGRAL DE RIEMANN:

Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em um conjunto J -mensurável Ω do $\mathbb{R}^m$, limitado.



$\Omega \subset \mathbb{R}^m$

f

$\mathbb{R}$

Seja $D = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ uma decomposição do conj. Ω , ou seja;

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n X_i, \text{ com}$$

$$\text{int}(X_i) \cap \text{int}(X_j) = \emptyset \text{ se } i \neq j$$

(pense numa "batata", sendo cortada em pedacinhos - cada X_i seria um pedacinho da batata)

Sejam m_i e M_i , respectivamente,

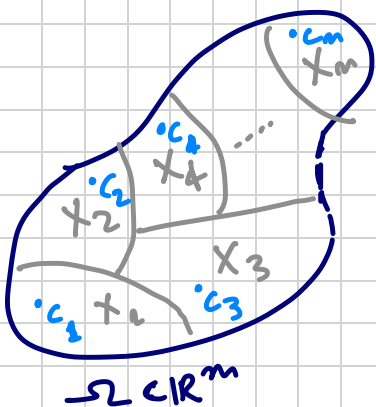
o ínfimo e o supremo de f em cada subconjunto X_i da decomposição; ou seja,

$$m_i = \inf_{x \in X_i} f(x) \quad ; \quad M_i = \sup_{x \in X_i} f(x)$$

Então,

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot \text{Vol}(X_i) \leq \sum_{i=1}^n M_i \cdot \text{Vol}(X_i)$$

Seja c_i um ponto qualquer em X_i , $i \in \{1, \dots, n\}$



Montamos assim a soma

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \text{Vol}(X_i), \text{ uma}$$

soma de Riemann, que é chamada de

DECOMPOSIÇÃO PONTILHADA, sendo denota por

$$D^* = \sum_{i=1}^n (f_i; D)$$

Como, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$;

$$m_i \leq f(c_i) \leq M_i \quad /$$

tem-se que

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot \text{Vol}(X_i) \leq \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \text{Vol}(X_i) \leq \sum_{i=1}^n M_i \cdot \text{Vol}(X_i)$$

O esboço acima constitui um esquema da prova do seguinte resultado:

TEOR.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em um conj. J -mensurável $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Então,

$$\int_{\Omega} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \text{Vol}(X_i)$$



INTEGRAIS DUPLAS:

No que segue, vamos obter, de forma iterada, um procedimento para calcular

$$\iint f(x, y) dA, \quad \text{onde } dA = dx dy \text{ ou } dA = dy dx,$$

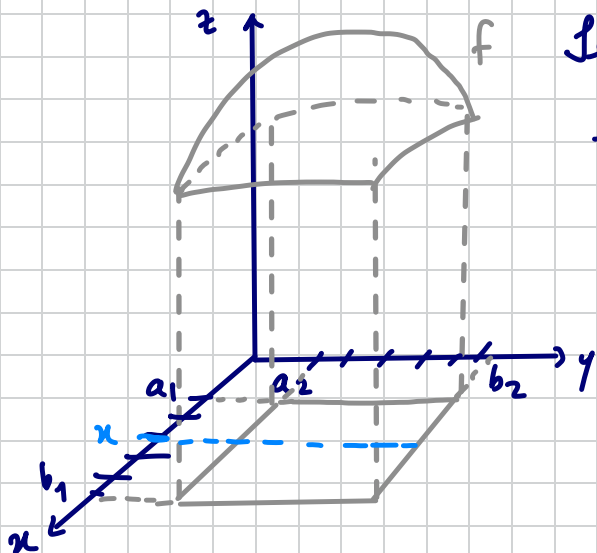
→
chamada de ELEMENTO DE ÁREA.

Seja dois casos a considerar:

1º CASO: Ω é um retângulo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.

Seja $f: [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável.

Para dar um significado geométrico, assume que $f \geq 0$ em seu domínio.



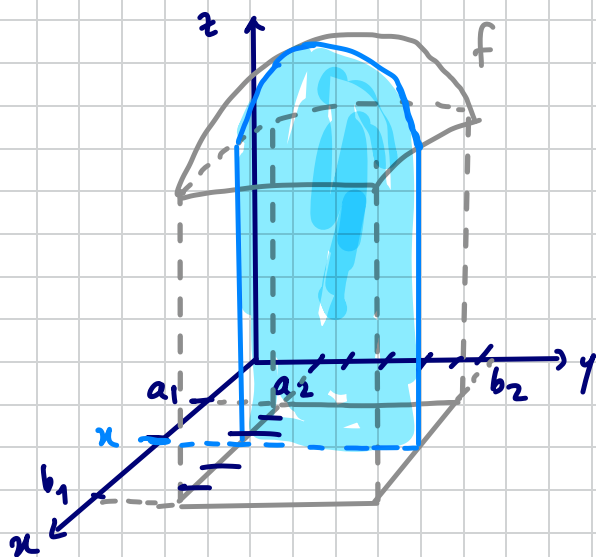
Seja $P = \{a_1 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b_1\}$
uma partição de

$[a_1, b_1]$.

Seja $x \in [a_1, b_1]$

fixado, e considere
o plano paralelo ao
plano $y z$, cortando

a região embaixo do gráfico de f em uma lâmina, como no esquema abaixo:



A área formada pela lâmina destacada acima (mantendo x fixado) será dada por:

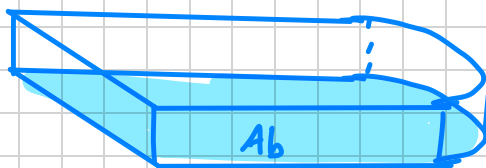
$$A(y) = \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy$$

$\uparrow$
 x ESTÁ "FÍXO"

Seja $\Delta x_i = t_i - t_{i-1}$ o comprimento de cada subintervalo da partição P de $[a_1, b_1]$.

Assim, o volume V_i de cada prisma obtido é dado por:

$$\Delta x_i = \Delta x$$



$$A_b = \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy = A(x)$$

$$V_i = A_b \cdot l$$

$$V_i = A(x) \cdot \Delta x_i$$

Assim, somando todos os volumes da partição, vamos obter o volume aproximado $\tilde{V}$:

$$\tilde{V} = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n A(x) \cdot \Delta x_i =$$



$$= \sum_{i=1}^n \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy \cdot \Delta x_i, \text{ uma}$$

soma de Riemann. Tomando o limite com $n \rightarrow \infty$ encontramos o volume V :

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_{a_2}^{b_2} f(x_i, y) dy \cdot \Delta x_i$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy dx$$

chamada de integral iterada.

EXEMPLOS:

01) $\iint_R (3x + y) dx dy$; onde $R = [0, 1] \times [0, 2]$.

(Vimos, na aula 03, que por definição, este integral resultare em 5)

Solução: $\int_{y=0}^{y=2} \left(\int_{x=0}^{x=1} (3x + y) dx \right) dy =$

$$= \int_{y=0}^{y=2} \left(\frac{3x^2}{2} + yx \right) \Big|_{x=0}^{x=1} dy =$$

$$\int_{y=0}^{y=2} \left(\frac{3}{2} + y - (0 + 0) \right) dy = \int_{y=0}^{y=2} \left(\frac{3}{2} + y \right) dy =$$

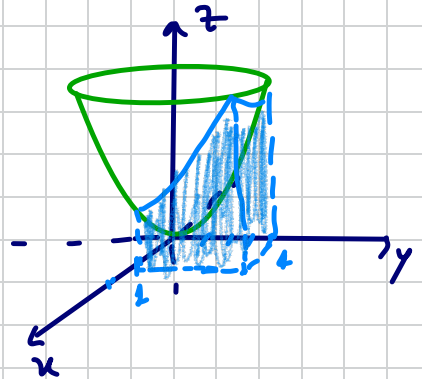
$$\left(\frac{3}{2} y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=2} = \frac{3}{2} \cdot 2 + \frac{(2)^2}{2} - (0+0) =$$

$$= 3+2 = 5 //$$

02) Calcule $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dA$, sendo

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 4].$$

Solução:



$$\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dA =$$

$$\int_{y=0}^{y=4} \left(\int_{x=0}^{x=1} (x^2 + y^2) dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=4} \left(\frac{x^3}{3} + y^2 \cdot x \right) \Big|_{x=0}^{x=1} dy =$$

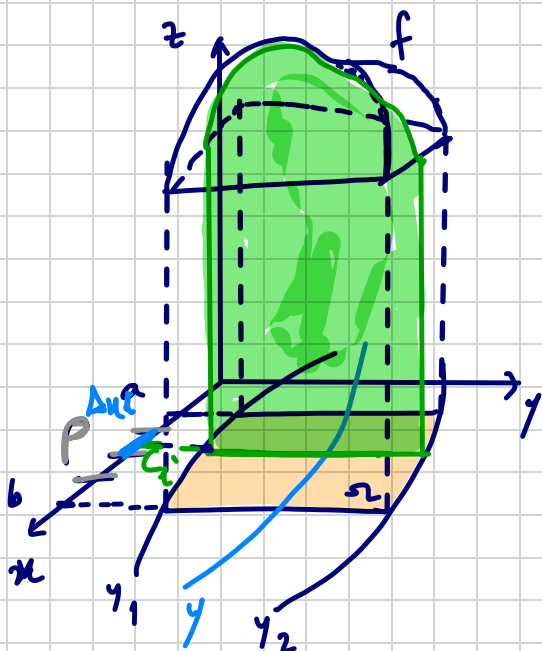
$$\int_{y=0}^{y=4} \left(\frac{1}{3} + y^2 - 0 \right) dy = \int_0^4 \left(\frac{1}{3} + y^2 \right) dy =$$

$$\left(\frac{1}{3}y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^4 = \frac{4}{3} + \frac{4^3}{3} = \frac{4 + 64}{3} = \frac{68}{3}$$



2.º caso (caso geral) : quando Ω fica limitada por pelo menos uma curva.

Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ integrável. Assume, para dar um sentido geométrico (volume) que $f \geq 0$ em Ω , sendo Ω limitada pelas curvas γ_1 e γ_2 , conforme o esquema:



Seja γ uma curva qualquer entre γ_1 e γ_2 e considere P uma partição da intervalo $[a, b]$ (no eixo x)

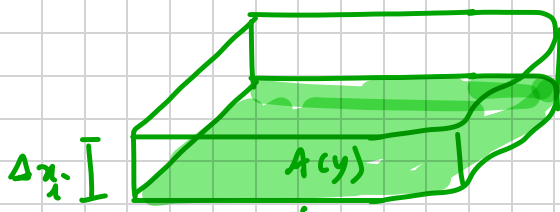
Seja c_i um ponto qualquer em $[t_{i-1}, t_i]$ da partição P .

Então, obtemos uma lâmina formada pelo intercepto do plano paralelo ao plano yz , passando por c_i , abaixo do gráfico de f .

A área dessa lâmina será dada por

$$A(y) = \int_{y_1}^{y_2} f(c_i, y) dy$$

Considere o cilindro de base $A(y)$ e altura Δx_i , conforme o esquema:



O volume V_i será:

$$V_i = A(y) \cdot \Delta x_i$$

Então, o volume V do sólido obtido será:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_i$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} A(\eta) \Delta \eta_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(c_i, y) dy \Delta \eta_i$$

$$= \int_{x=a_1}^{x=a_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy dx$$

$F(x)$

estes
limites de
integração
são funções

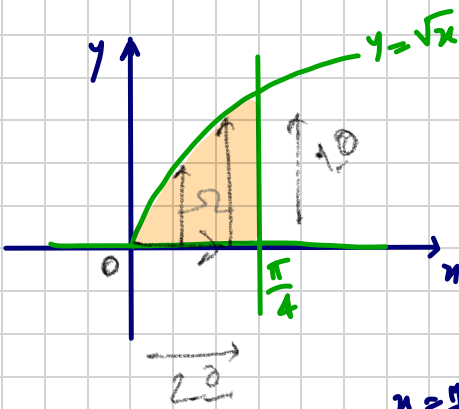
OS LIMITES DE
INTEGRAÇÃO MAIS EXTERNO
DEVEM SER CONSTANTES, SEMPRE!

Vejam um exemplo:

01) Calcule $\iint_R \sqrt{x} \cdot \cos(y\sqrt{x}) dA$, com R

formado pelas retas $y=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ e pela curva $y=\sqrt{x}$.

Solução: Imediatamente, precisamos desenhar a região a ser integrada.



$$\iint_{\Omega} f(x,y) dA = \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} \left(\int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} \sqrt{x} \cdot \cos(y\sqrt{x}) dy \right) dx =$$

$$\int \cos u du$$

$$u = y\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow du = \sqrt{x} dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} \left[\int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} \underbrace{\cos(y\sqrt{x})}_u \cdot \underbrace{(\sqrt{x} dy)}_{du} \right] dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} \left. \sin(y\sqrt{x}) \right|_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx = \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} (\sin(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}) - \sin 0) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -(\cos \frac{\pi}{4} - \cos 0) =$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} //$$



02) $\iint_{\Omega} x\sqrt{y} \, dx \, dy$; sendo Ω a região formada pelas retas $y=0$, $x+y=2$ e pela parábola $x=y^2$, no 1º quadrante.

(FAREMOS NA PRÓX. AULA)