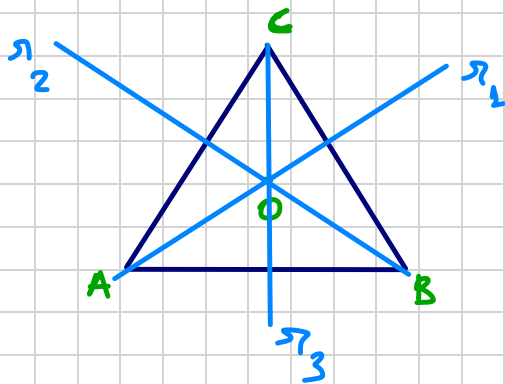


Na aula passada vimos alguns exemplos de grupos. Vamos seguir com mais alguns exemplos.

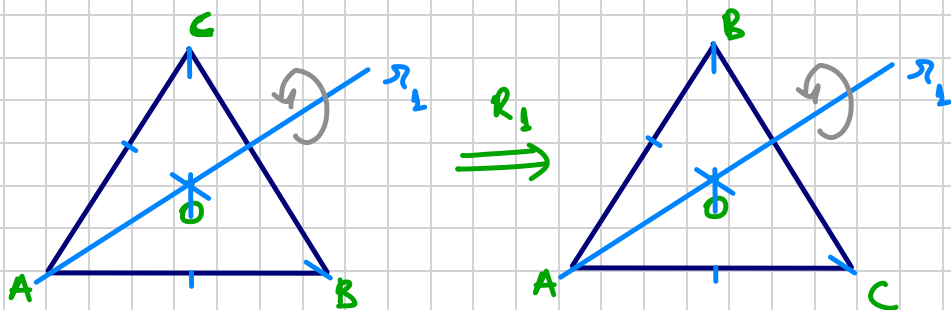
07) Considere o conjunto S_Δ onde seus elementos são rotações e translações de um triângulo equilátero da seguinte modo: seja ABC um triângulo equilátero, com centro em O e bissetrizes r_1, r_2 e r_3 , como no esquema:



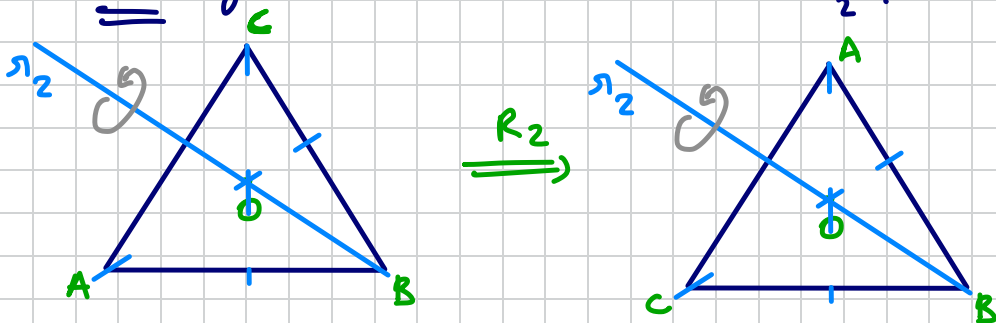
Vamos efetuar rotações e translações desse triângulo com referência o centro O , de tal modo que, o efeito dessa operação, inicialmente, preserve a figura na mesma posição.

ROTAÇÕES: girando, em torno do centro O do triângulo ABC , teremos as rotações:

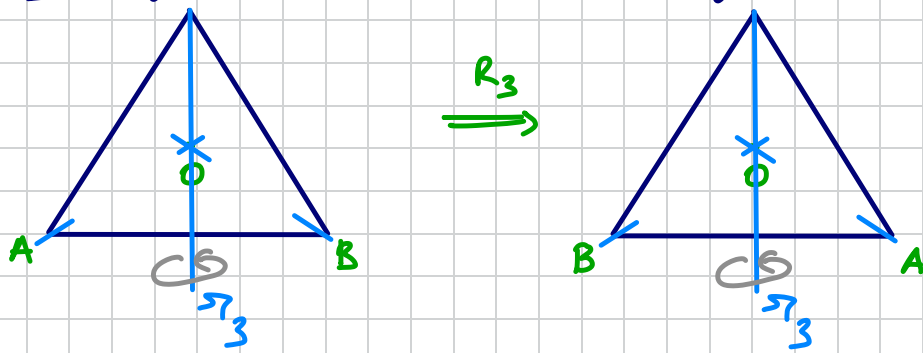
R_1 : giro de 180° em torno da reta r_1 :



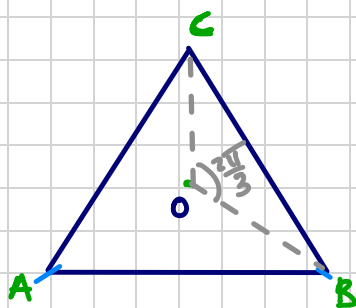
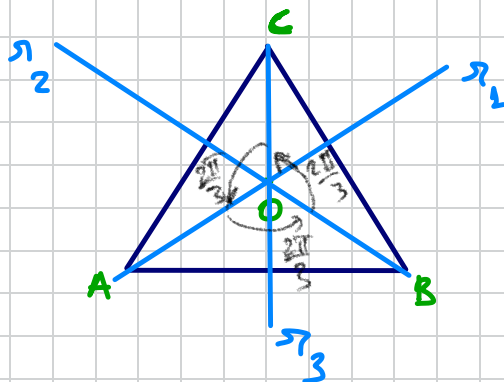
R_2 : giro de 180° em torno da reta r_2 :



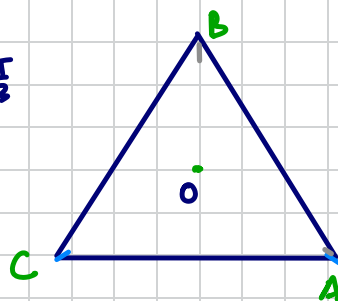
R_3 : giro de 180° em torno da reta r_3 :



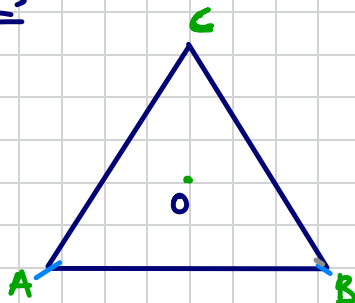
TRANSLAÇÕES: Serão $R_{\frac{2\pi}{3}}$, $R_{\frac{4\pi}{3}}$ e $R_{\frac{6\pi}{3}} = R_{2\pi}$:



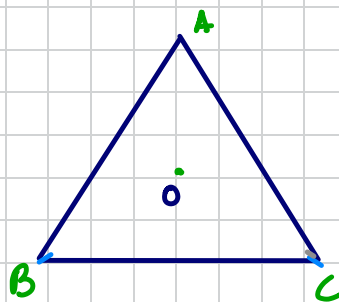
$R_{\frac{2\pi}{3}}$



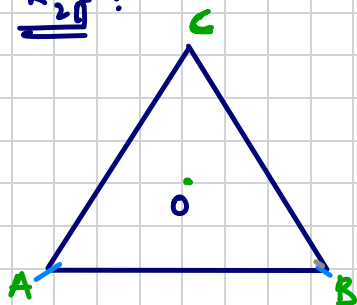
$R_{\frac{4\pi}{3}}$:



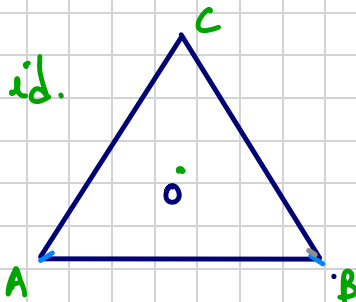
$R_{\frac{4\pi}{3}}$



$R_{2\pi}$:



$$R_{2\pi} = id.$$



(Veja que $R_{2\pi}$ dá um giro de 360° e deixa os vértices na mesma posição. Dizerem que é a IDENTIDADE, ou seja, no final, não altera as posições dos vértices)

Construamos, assim, o conjunto

$$S_\Delta = \{ id, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}, R_1, R_2, R_3 \}$$

Vamos equipar este conjunto com a operação de composição $\circ$; onde, por exemplo:

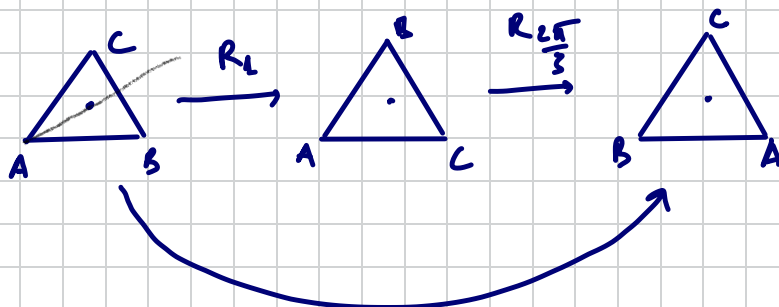
$$R_{\frac{2\pi}{3}} \circ R_1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

significa que primeiro efetuamos uma rotação R_1 , e em seguida uma translação $R_{\frac{2\pi}{3}}$.

Vejam os que resultam o caso acima:

$$R_{\frac{2\pi}{3}} \circ R_1 :$$



$$R_{\frac{2\pi}{3}} \circ R_1 = R_3$$

E assim, para todas as outras composições possíveis, resultando sempre uma das seis que definem o conjunto S_3 .

Assim, temos a estrutura algébrica

$$(S_3, \circ)$$

Esta estrutura é um grupo, onde o neutro da operação de composição é id.

Logo, para comprovar que é um grupo é preciso montar a tabela de operação em S_3 .

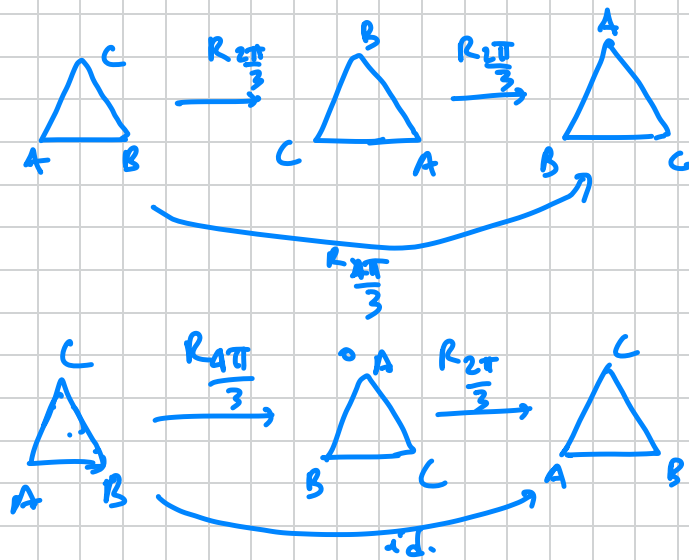
O grupo $(S_3, \circ)$ chama-se grupo das simetrias do triângulo.

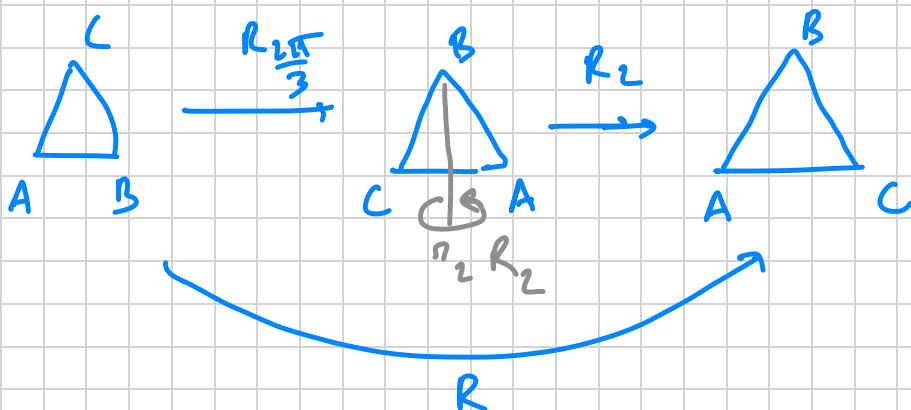
	id	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$R_{\frac{4\pi}{3}}$	R_1	R_2	R_3
id	id	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$R_{\frac{4\pi}{3}}$	R_1	R_2	R_3
$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$R_{\frac{4\pi}{3}}$	id.	R_3	R_1	
$R_{\frac{4\pi}{3}}$	$R_{\frac{4\pi}{3}}$	id				
R_1	R_1					
R_2	R_2					
R_3	R_3					

et cetera.

$$\text{id} \circ X = X$$

$$X \circ \text{id} = X$$





Fize como um exercício completar a tabela acima

08) O conjunto $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$ o conjunto das congruências módulo m . ($m \geq 2$).

(lembrando: $a, b \in \mathbb{Z}$. $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$).

Então, $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid (b-a)$

- A classe de todos os elementos que são congruentes a 0 (ou seja, cujo resto da divisão por m é exato) é indicada por $\bar{0}$.
- A classe de todos os elementos que são congruentes a 1, (ou seja, cuja divisão por m deixa

resto 1) e' indicada por $\bar{1}$.

• et cetera.

ex.: $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ "3 Filas"

$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
0	1	2
3	4	5
6	7	8
9	10	11
12	13	14
...	...	...

$13 \in \bar{1}$ pois

$$\begin{array}{r} 13 \quad \overline{) 3} \\ \underline{12} \\ 1 \end{array}$$

$8 \in \bar{2}$ pois:

$$\begin{array}{r} 8 \quad \overline{) 3} \\ \underline{6} \\ 2 \end{array}$$

Defina em $\mathbb{Z}_m$ a operação

$$\oplus: \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \longrightarrow \mathbb{Z}_m$$

$$(\bar{a}, \bar{b}) \mapsto \bar{a} \oplus \bar{b} := \overline{a+b}$$

Como os objetos a serem "somados" são conjuntos, e cada um deles tem infinitos representantes, precisamos verificar se $\oplus$ está

bem definida, para evitar ambigüidade
(ou seja, a soma deve resultar na mesma,
independente dos representantes utilizados como
somentos)

Ou seja, precisamos mostrar, que
 $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{x} \oplus \bar{y}.$

Suponha que $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{x}, \bar{y}).$

Então, segue da igualdade acima que:

$$\bar{a} = \bar{x} \quad \text{e} \quad \bar{b} = \bar{y}$$

Logo, $a \equiv x \pmod{m}$ e $b \equiv y \pmod{m}$

Deus; $m \mid (a-x)$ e $m \mid (b-y)$

Então^(*), $m \mid (a-x) + (b-y)$

(*) $m \mid \alpha$ e $m \mid \beta \Rightarrow m \mid (\alpha + \beta) :$

$\exists p \in \mathbb{Z} : m \cdot p = \alpha$ e $\exists q \in \mathbb{Z} : m \cdot q = \beta$

Logo:

$$\alpha + \beta = mp - mq = m \cdot (p + q) \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow m \mid (\alpha + \beta)$$

Então, tem-se que

$$m \mid ((a+b) - (x+y))$$

$$\Rightarrow a+b \equiv (x+y) \pmod{m}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} \overline{a+b} & = & \overline{x+y} \\ \parallel & & \parallel \\ \bar{a} \oplus \bar{b} & & \bar{x} \oplus \bar{y} \end{array}$$

Logo, $\oplus$ está bem definida em $\mathbb{Z}_m$.
Afirma-se que $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$ é um grupo.

De fato, $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{Z}_m$, temos:

(i) ASSOCIATIVIDADE:

$$\bar{a} \oplus (\bar{b} \oplus \bar{c}) = \bar{a} \oplus (\overline{b+c}) =$$

$$= \overline{a + (b + c)} = \overline{(a + b) + c} =$$

$\uparrow$
 vale a associativ.
 em $\mathbb{Z}$.

$$= \overline{a + b} \oplus \overline{c} = \underline{\underline{(\overline{a + b}) \oplus \overline{c}}}$$

(ii) $\overline{0}$ é o neutro, pois:

$$\overline{0} \oplus \overline{a} = \overline{0 + a} = \overline{a} ; e$$

$$\overline{a} \oplus \overline{0} = \overline{a + 0} = \overline{a} .$$

(iii) todo elemento é simetrizável. $\emptyset$
 simétrico e $\overline{a}$ é $-\overline{a}$:

$$\overline{a} \oplus \overline{-a} = \overline{a + (-a)} = \overline{0} ; e$$

$$\overline{-a} \oplus \overline{a} = \overline{-a + a} = \overline{0}$$

(iv) Além disso, é comutativo (abeliano):

$$\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a + b} = \overline{b + a} = \overline{b} \oplus \overline{a} .$$

Conclusão: $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ é um grupo abeliano.

CAP. II:

SUBGRUPOS:

Def.: Seja, $(G, *)$ um grupo e considere $H \subset G$ um subconjunto não vazio de G . Denomina-se $(H, *)$ é um subgrupo de G , e escrevemos $H < G$ se H , com a operação $*$ de G for fechada, preservar a estrutura de grupo, restrita aos elementos de H . Mais precisamente, $H < G$ se, e só se:

$$(i) \quad h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 * h_2 \in H \quad (\text{fechamento})$$

$$(i) \quad \forall h_1, h_2, h_3 \in H;$$
$$h_1 * (h_2 * h_3) = (h_1 * h_2) * h_3$$

(associatividade)

$$(ii) \quad \exists e_H \in H \text{ tal que}$$

$$h * e_H = h \quad \text{e} \quad e_H * h = h,$$
$$\forall h \in H. \quad (e_H \text{ é o neutro de } H)$$

$$(iii) \quad \forall h \in H, \exists h^{-1} \in H \text{ tal que}$$

$$h * h^{-1} = e_H \quad \text{e} \quad h^{-1} * h = e_H$$

(h^{-1} é o simétrico de $h \in H$)

Observações:

01) O elemento neutro de H , denotado acima por e_H é o próprio neutro e de G . De fato, dado $e_H \in H$ o neutro de H e $e \in G$ o neutro de G . Como $e_H \in H \subset G$, então, seja $h \in H$.

Então:

$$e_H * h = h \quad (I)$$

Além disso, como $e_H \in H \subset G \Rightarrow e_H \in G$, segue que (e $h \in H \subset G \Rightarrow h \in G$).

$$(II) \quad e * h = h \quad (\text{olhando em } G)$$

De (I) e (II) segue que:

$$e_H * h = h = e * h.$$

$$\Rightarrow e_H * h = e * h.$$

Multiplicando à direita por h^{-1} , obtemos:

$$(e_H * h) * h^{-1} = (e * h) * h^{-1}$$

Por associatividade,

$$e_H * (\underbrace{h \times h^{-1}}_e) = e * (\underbrace{h \times h^{-1}}_e)$$

$$e_H * e = e * e = e$$

$$\boxed{e_H * e = e} \quad (\text{III})$$

Por outro lado; pensando em G , podemos escrever

$$\boxed{e_H = e_H * e} \quad (\text{IV})$$

De (III) e (IV) segue que

$$e = e_H * e = e_H.$$

Ou seja, o neutro de $H \leq G$ é o mesmo neutro de G .

02) A associatividade de H é herdada da associatividade de G , pois como todo elemento de H é um elemento de G , então, dados

$h_1, h_2, h_3 \in H \subset G$. , segue que estão em G ,
e dirão:

$$h_1 * (h_2 * h_3) = (h_1 * h_2) * h_3.$$

03) O simétrico de $h \in H$ é o mesmo
simétrico de $h \in H \subset G$.

PROPOSIÇÃO: Seja $(G, *)$ um grupo e $H \subset G$
um subconjunto não vazio em G . Então, $H < G$
se, e somente se,

(a) $\forall h_1, h_2 \in H ; h_1 \cdot h_2 \in H$ (fechamento)

(b) $\forall h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$.

DEMONSTRAÇÃO: Veja pág 61 do livro.

COROLÁRIO: $H < G$ se, e somente se,

$\forall h_1, h_2 \in H ; h_1 \cdot h_2^{-1} \in H$.

DEMONSTR.

($\Rightarrow$) Suponha que $H < G$.

Seja proposição anterior, dados $h_1, h_2 \in H$,
tem-se por (b) que $h_2^{-1} \in H$.

Então, por (a) segue que

$$h_1 \cdot h_2^{-1} \in H.$$

($\Leftarrow$) Suponha que, $\forall h_1, h_2 \in H$, tem-se
que $h_1 \cdot h_2^{-1} \in H$.

A mostrar: $H < G$, ou seja, mostrar que:

(a) $h_1 \cdot h_2 \in H$.

(b) $h_2 \in H \Rightarrow h_2^{-1} \in H$.

$$\underbrace{h_1 \cdot h_2}_{=} = \underbrace{h_1 \cdot (h_2^{-1})^{-1}}_{=} \in H.$$

Logo, vale (a).

Além disso; se $h_2 \in H$ então:

$$e \cdot h_2^{-1} \in H, \text{ por lei neutra.};$$

mas $e \neq h_2^{-1} = h_2^{-L} \in H.$

□

Agora que segue apresentamos exemplos de subgrupos.

(a) $(\mathbb{Z}, +)$ o grupo dos inteiros, equipado com a adição usual (neutro: 0)

Seja o conj. $2\mathbb{Z}$ o conj. de todos os inteiros pares.

Então, $(2\mathbb{Z}, +) < (\mathbb{Z}, +)$. De fato:

$\forall \alpha, \beta \in 2\mathbb{Z}$; temos que

$$\alpha = 2x \quad e \quad \beta = 2y \quad ; \quad x, y \in \mathbb{Z}.$$

Logo; temos que:

$$(a) \quad \alpha + \beta = 2x + 2y = 2(\underbrace{x+y}_{\in \mathbb{Z}}) \in 2\mathbb{Z}.$$

$$(b) \quad \forall \alpha = 2x. \quad ; \quad \gamma = -2x \in 2\mathbb{Z} \quad e$$

$$e' \text{ tal que } \alpha + \gamma = 2x + (-2x) = 0$$

Logo $\delta = -22 \in 2\mathbb{Z}$ e!
a simetria de α , $\forall \alpha \in 2\mathbb{Z}$.

(b) $G = M_2(\mathbb{R})$; $(G, \cdot)$ (produto de matrizes)

Seja $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$, i.e.;

Note que $H \subset G$.

Vamos mostrar que $H < G$.

De fato, sejam $\alpha, \beta \in H$. Então,

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \beta = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

com $x, y \in \mathbb{R}$. Bem, temos que:

$$\begin{aligned} \text{(a) } \alpha \cdot \beta &= \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + x \cdot 0 & 1 \cdot y + x \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot y + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & y+x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H \end{aligned}$$

$$(b) \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \alpha^{-1} = ?$$

$$\text{É fácil ver que } \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Logo, $H < G$.
