

Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo IV - Curso de Lic. em Matemática
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 01 de Exercícios - Integrais múltiplas (primeiros conceitos)

1. Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco do $\mathbb{R}^m$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrável, e sejam

$$m = \inf\{f(x) : x \in A\} \text{ e } M = \sup\{f(x) : x \in A\}.$$

Mostre que

$$m \leq \frac{\int_A f(x) dx}{\text{Vol}(A)} \leq M.$$

2. Adicionando a hipótese no exercício anterior de que f é contínua no bloco A , conclua que existe $c \in A$ tal que¹

$$\int_A f(x) dx = f(c) \cdot \text{Vol}A.$$

3. Encontre um intervalo fechado que contenha o valor da integral dupla dada em cada caso (**Obs.:** use o exercício 1).

(a) $\int_R \int (x^2 + y^2) dA$, onde R é a região retangular com vértices em $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$.

(b) $\int_R \int e^{xy} dA$, onde R é a região retangular com vértices em $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$.

(c) $\int_A (x + y)e^{yz} dx dy dz$, onde A é o bloco $[1, 3] \times [0, 2] \times [1, 4]$.

4. Sem efetuar cálculo algum, explique por quê a função $f : A = [0, 100] \times [0, 100] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{se } (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é integrável no bloco A . E qual seria o valor? Se substituirmos o bloco A por todo o $\mathbb{R}^2$, as conclusões acima mudariam? Justifique.

5. Usando uma partição regular, através da definição de integral múltipla, mostre que, sendo A um retângulo do $\mathbb{R}^2$, com lados paralelos aos eixos coordenados, então

$$\int_A 1 dx dy = \text{área do retângulo}.$$

6. Usando a definição de integral dupla como limite de somas de Riemann, calcule a integral $\int_A f(x, y) dx dy$, sendo:

(a) $f(x, y) = x + 4y$, e A o bloco $[0, 2] \times [0, 1]$. (Resp.: 6)

(b) $f(x, y) = 3x^2 + 2y$, e A o bloco $[0, 2] \times [0, 1]$. (Resp.: 10)

(c) $f(x, y) = x^2 + 3y$, e A o bloco $[0, 2] \times [1, 5]$.

7. Seja $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}\}$. Explique por quê

$$\int_X (x + y) dx dy \geq \int_X x^2 + y^2 dx dy.$$

¹usar o Teorema do valor intermediário