

Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Álgebra A
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 01 - Operações. Grupos

1. Em cada item a seguir temos definida uma operação em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Verifique se ela é associativa.

(a) $(a, b) \star (c, d) = (ac, 0)$.

(b) $(a, b) \circ (c, d) = (a + c, bd)$

(c) $(a, b) \perp (c, d) = (ac, ad + bd)$

2. Considere a operação $\star$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$x \star y = ax + by + cxy,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ são números reais dados. Obtenha as condições sobre a, b, c para que $\star$ seja associativa.

3. Considere a operação $\oplus$ sobre o conjunto dos reais não-negativos definida por

$$x \oplus y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Verifique se $\oplus$ é comutativa, associativa, se possui elemento neutro e se existem elementos invertíveis.

4. Dizemos que uma operação $*$ em um conjunto não vazio A é *totalmente não associativa* se

$$(x * y) * z \neq x * (y * z), \forall x, y, z \in A.$$

Mostre que se $*$ é totalmente não associativa, então $*$ não é comutativa.

5. Estabeleça as condições sobre $m, n \in \mathbb{Z}$ de modo que a operação $\star$ sobre $\mathbb{Z}$ dada pela lei $x \star y = mx + ny$:

(a) seja associativa;

(b) seja comutativa;

(c) admita elemento neutro.

6. Considere $F = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ o conjunto de todas as funções reais de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e $\circ$ a operação de composição entre funções em F . Mostre que $f(x) = 3x - 1 \in F$ é simetrizável mediante a operação $\circ$ em F .

7. Sejam E e F dois conjuntos onde estão, respectivamente, definidas as operações $\star$ e Δ , as quais são associativas e possuem neutros. Sobre o conjunto $E \times F$ definimos a operação $\diamond$ por

$$(a, b) \diamond (c, d) = (a \star c, b \Delta d).$$

(a) Mostre que $\diamond$ é associativa e possui elemento neutro.

(b) Determine os elementos inversíveis de $E \times F$ para esta operação.

8. Considere $A = \{1, 3, 9, 27\}$ e seja $\star$ a operação em A dada por $x \star y = \text{m.m.c}\{x, y\}$. Construa a tábua dessa operação. Verifique se há elementos simetrizáveis.

9. Considere o conjunto $G = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Construa a tábua da operação $\star$ agindo sobre G em cada caso:

(a) $x \star y = x \cup y$; (b) $x \star y = x \cap y$

10. Mostre que $\mathbb{R}$ munido da operação $\star$ definida por

$$x \star y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

é um grupo abeliano.

11. Mostre que $\mathbb{Q} \setminus \{0\} \times \mathbb{Q}$ munido da operação $\star$ definida por

$$(a, b) \star (c, d) = (ac, bc + d)$$

é um grupo.

12. Sejam $(G_1, \perp)$ e $(G_2, \square)$ dois grupos. No conjunto $G_1 \times G_2$ defina a operação

$$(g_1, g_2) \cdot (g'_1, g'_2) = (g_1 \perp g'_1, g_2 \square g'_2).$$

Mostre que $G_1 \times G_2$ com a operação acima é um grupo.

13. Construa o conjunto das simetrias espaciais $D_{\square}$ de um quadrado com a multiplicação sendo a composição, e verifique que é um grupo. Construa a tábua da multiplicação. Quais elementos geram o grupo?
14. Construa a tábua da multiplicação das simetrias espaciais de um hexágono regular. Mostre que também é um grupo. Quais elementos geram o grupo?
15. Sejam S um conjunto, G um grupo e $f : S \rightarrow G$ uma aplicação bijetiva. Para cada $x, y \in S$, defina o produto $x \star y$ por

$$x \star y = f^{-1}(f(x)f(y)).$$

Mostre que esta multiplicação define uma estrutura de grupo sobre S .

16. Construa a tábua da operação $\star$ sobre $G = \{e, a, b\}$, sabendo que $(G, \star)$ é um grupo.
17. Seja G um grupo. Mostre que se $(ab)^2 = a^2b^2$, para quaisquer $a, b \in G$, então G é um grupo abeliano.
18. Sejam a, b, c elementos de um grupo multiplicativo G . Prove que $(abc)^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1}$. Obtenha $x \in G$ tal que $abctxb = c$.
19. Suponha que em um grupo G todo elementos é seu próprio inverso. Mostre que G é abeliano.
20. Determine $x \in S_5$ que seja solução da equação $a^2xb^{-1} = c$, onde

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$