

Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo 3
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 02 de Exercícios - Funções de várias variáveis reais

1. Em cada item a seguir, determine o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e faça um esboço do domínio:

(a) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$	(b) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
(c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4y^2 + 16}$	(d) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$
(e) $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$	(f) $f(x, y) = \arcsen(x + y)$
(g) $f(x, y) = \arcsen \frac{x}{x + y}$	(h) $f(x, y) = \arctan \frac{x + y}{x - y}$

2. Obtenha o domínio de cada função a seguir e faça um esboço gráfico de f .

(a) $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$	(b) $f(x, y) = x^2 - y^2$
(c) $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$	(d) $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

3. Esboce a curva de cada função abaixo.

(a) $f(t) = (t, t^2, t^3), \quad 0 \leq t \leq 1.$	(b) $f(t) = (4 - 4t)\vec{i} + (4 - 4t)\vec{j}, \quad t \in [0, 2].$
(c) $f(t) = (\ln t, t, 1), \quad t > 0$	(d) $f(t) = (6 \sin t, 4, 25 \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$
(e) $f(t) = (8 - 4 \sin t, 2 \cos t, 4 \sin t)$	(f) $f(t) = (\sin t, t, \cos t)$

4. Obtenha o domínio Ω de cada função vetorial $\vec{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ a seguir:

(a) $\vec{f}(t) = \sqrt{2t + 6}\vec{i} + \sqrt{\frac{1-t}{2-t}}\vec{j} + \ln(2-t)\vec{k}.$	
(b) $\vec{f}(t) = \left(\frac{1}{t}, \frac{t+2}{\sqrt{t^2-t}}, e^{1-t}\right).$	
(c) $\vec{f}(t) = (\sec t, t, \ln t).$	
(d) $\vec{f}(t) = \ln(t+1)\vec{i} + \arctan t\vec{j}$	

5. Esboce a superfície definida explicitamente pela função $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$

6. Idem para a função $f(x, y) = \cos x.$

7. Desenhe as superfícies definidas parametricamente pelas seguintes funções:

(a) $f \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$ onde $u, v \in \mathbb{R}$	
(b) $f \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix},$ onde $0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$	

8. Seja a função vetorial $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

Quais são as funções coordenadas de f ? Considere o espaço domínio sendo o plano xy e o espaço imagem como sendo o plano uv . Assim:

- (a) Determine a imagem do segmento da reta $y = x$ entre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - (b) Determine a imagem da região definida por $0 < x$, $0 < y$ e $x^2 + y^2 < 1$.
 - (c) Determine o ângulo entre as imagens das retas $y = 0$ e $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$. (Resp.: $\frac{\pi}{3}$).
9. Suponhamos que a temperatura num ponto (x, y, z) do espaço é dada por $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Uma partícula se move de modo que no tempo t a sua posição é dada por $(x, y, z) = (t, t^2, t^3)$. Determine a temperatura no ponto ocupado pela partícula em $t = \frac{1}{2}$.
10. O potencial elétrico no ponto (x, y) do plano xy é $V(x, y)$ volts, onde

$$V(x, y) = \frac{4}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}.$$

Trace as curvas equipotenciais de V em 16, 12, 8, 4, 1, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$.

11. Suponhamos que a densidade por unidade de área de uma película fina, referida às coordenadas retangulares, planas, seja dada pela fórmula

$$d(x, y) = x^2 + 2y^2 - x + 1,$$

para $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$. Esboce o conjunto de pontos nos quais a película tem densidade $\frac{7}{4}$.

12. Faça o esboço das superfícies de nível da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$ em 8, 4, 0, -4 e -8 .
13. Seja $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 \\ x + y + z \end{pmatrix}.$$

Determine o conjunto de nível γ definido implicitamente pela equação

$$f(x, y, z) = (2, 1).$$