

Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo 3 - Turma T2 e T3
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 01 de Exercícios - Noções de Topologia

1. Seja X o conjunto das funções contínuas em $[0, 1]$ e seja $\varphi : [0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$ contínua. Defina

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \cdot \varphi(x) dx.$$

Mostre que (X, d) é um espaço métrico.

2. Seja $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números reais positivos. Mostre que

$$d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$$

é uma métrica em $\mathbb{R}^+$.

3. Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos. Mostre que a aplicação $d : X_1 \times X_2 \rightarrow [0, +\infty)$ definida por

$$d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

define uma métrica em $X_1 \times X_2$, onde $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$.

4. Para quaisquer $X, Y \subset \mathbb{R}$, prove que

(a) $\text{int}(X \cap Y) = \text{int}(X) \cap \text{int}(Y)$.

(b) $\text{int}(X) \cup \text{int}(Y) \subset \text{int}(X \cup Y)$.

5. Mostrar com um exemplo que, dados $X, Y \subset \mathbb{R}$, $\text{int}(X \cup Y) \neq \text{int}(X) \cup \text{int}(Y)$.
6. Se $A = [0, 1) \cup (1, 2] \cup \{3\}$, determine $\text{int}(A)$.
7. Qual é o interior do conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : x < y\}$ em relação a $\mathbb{R}^2$? Justifique.
8. Mostre que o subconjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$ é um aberto de $\mathbb{R}^2$.
9. Mostre que o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}$ é um aberto do $\mathbb{R}^2$.
10. Mostre que o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é um fechado de $\mathbb{R}$.
11. Mostre que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é fechado e nem aberto de $\mathbb{R}$. Qual é o fecho de $\mathbb{Q}$?
12. Faça o desenho de cada região do $\mathbb{R}^2$ abaixo, identificando e justificando se a mesma é um aberto, ou fechado ou nem aberto e nem fechado do $\mathbb{R}^2$. Identifique o seu fecho e a sua fronteira. Decida também se algum deles é compacto do $\mathbb{R}^2$.
- (a) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 < x^2 + y^2 \leq 9\}$
- (b) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_1((x, y), (1, 0)) < 1\}$
- (c) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y < 1\}$
- (d) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_\infty((x, y), (0, 1)) \leq 1\}$