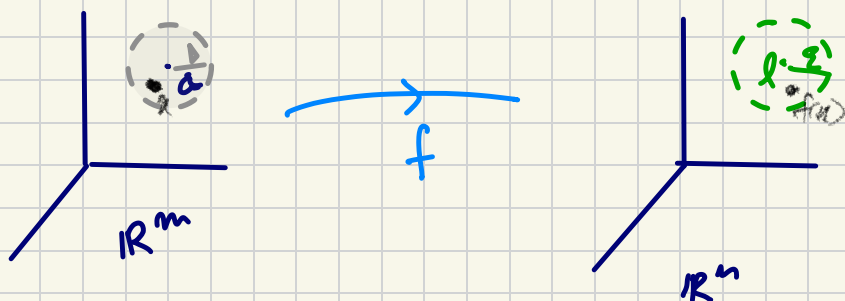


Na aula passada introduzimos o conceito de limite de funções e séries variáveis reais.

De maneira geral sendo $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação^(*) do conjunto Ω , dizemos que $l \in \mathbb{R}^n$ é o limite de $f(x)$ quando x tende para a , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \quad \text{se, e somente se,}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, } \forall x \in B_\delta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(l).$$



(*) $a \in \mathbb{R}^m$ é ponto de acumulação de $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ se $\forall \delta > 0, (B_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap \Omega \neq \emptyset$.



Seja funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ (funções escalares),
esta definição adapta-se para:

Def. Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$;

$a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ um ponto de acumulação do
conjunto Ω , digamos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite de f
quando $(x, y) \rightarrow a = (x_0, y_0)$, e escrevemos

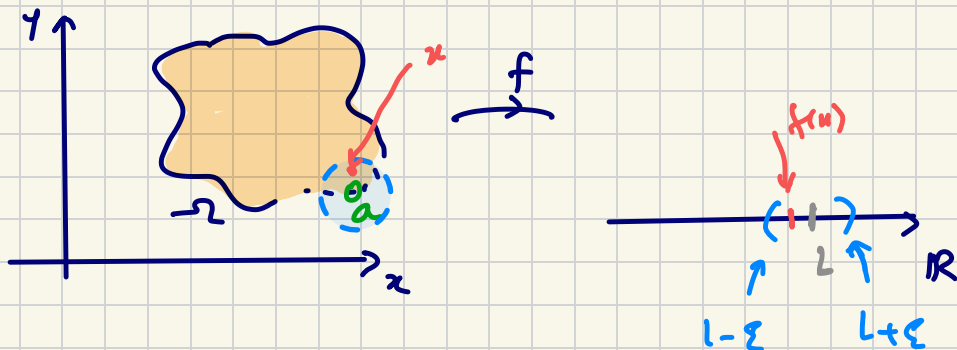
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L \in \mathbb{R} \quad \text{ou, a no'ra:}$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall (x, y) \in \underbrace{B(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\}}_{\delta}$,
implica em $f(x, y) \in \underbrace{B(L)}_{\varepsilon}$.

Oureja;

$$\forall (x, y): \quad \underbrace{0 < d((x, y); (x_0, y_0)) < \delta}_{\delta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$



FIXADO $\varepsilon > 0$.

VAI EXISTIR $\delta > 0$ TAL QUE:

DESENTANDO $B_\delta(a) \setminus \{a\}$, $\forall x$ NESTA BOLA, COM $x \in \Omega$

É GARANTIDO QUE $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon) = B_\varepsilon(L)$

Vejaamos um exemplo.

Ex: Mostre que $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} (2x+y) = 2$

Solução: Dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $\delta > 0$ (δ dependente de ε), tal que, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x,y) \in B_\delta(1,0) \setminus \{(1,0)\} \Rightarrow f(x,y) \in B_\varepsilon(2).$$

ou seja, $\forall (x,y): 0 < d((x,y), (1,0)) < \delta \Rightarrow$

$$\hookrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x,y) - 2| < \varepsilon. \quad 0 < \sqrt{(x-1)^2 + y^2} < \delta$$

Analisando $|f(x,y) - 2|$; temos:

$$\begin{aligned} |f(x,y) - 2| &= |2x + y - 2| = |2x - 2 + y| = \\ &= |2(x-1) + y| \leq 2|x-1| + |y| \end{aligned}$$

Como sabemos que

$$0 < \sqrt{(x-1)^2 + y^2} < \delta,$$

existe x , e no y

$$\underbrace{\sqrt{(x-1)^2}}_{\substack{4 \\ |x-1|}} < \delta \quad \text{e} \quad \underbrace{\sqrt{y^2}}_{\substack{4 \\ |y|}} < \delta.$$

Disto, segue que:

$$|f(x,y) - 2| \leq 2 \cdot \underbrace{|x-1|}_{< \delta} + \underbrace{|y|}_{< \delta} < 2\delta + \delta = 3\delta$$

$$\Rightarrow \underbrace{|f(x,y) - 2|}_{< \epsilon} < \underbrace{3\delta}_{:= \epsilon}$$

Ou seja, basta tomar $\boxed{\delta = \frac{\epsilon}{3}}$

Isso prova que $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} (2x+y) = 2$.

□

PROPOSIÇÃO. Sejam $f, g: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções e a um ponto de acumulação de Ω . Se existirem os limites $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$, então:

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2 = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} ; \text{ desde que o denominador não seja nulo.}$$

PROPOSIÇÃO: (UNICIDADE DO LIMITE) O limite de uma função $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, se existir, é único.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação da conj. Ω .

Por absurdo, suponha que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2,$$

$$\text{com } L_1 \neq L_2 \quad ; (L_1, L_2 \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Toome } \varepsilon = |L_1 - L_2| > 0.$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1, \text{ então } \exists \delta_1 > 0$$

$$\text{tal que } \forall x: x \in B(a) \setminus \{a\} \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

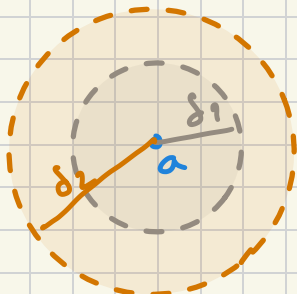
(*)

$$\text{Do mesmo modo, como } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2,$$

então $\exists \delta_2 > 0$, tal que,

$$\forall x \in B(a) \setminus \{a\} \Rightarrow |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(**)



Donc $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\} > 0$. A min;
 $\forall x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$, valons $(*)$ et $(**)$
 simultanément, on a :

$$|f(x) - l_1| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |f(x) - l_2| < \varepsilon.$$

A min :

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| =$$

$$= |(l_1 - f(x)) + (f(x) - l_2)| \leq$$

$$\leq \underbrace{|f(x) - l_1|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(x) - l_2|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon = |l_1 - l_2| < \varepsilon \Rightarrow \varepsilon < \varepsilon.$$

Abs!

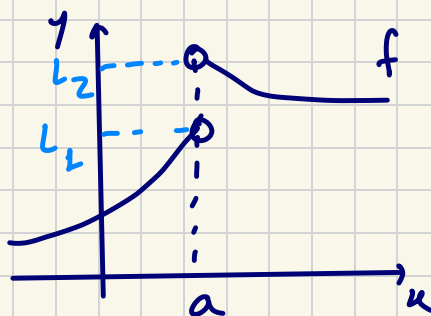
Donc, $l_1 = l_2$.

□

LIMITES POR CAMINHOS!

Não que reque, nem adaptar / ampliar um resultado estudado no Cálculo 1. No Cálculo 1 estudou-se o conceito de limites laterais.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1; \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_2, \quad L_1 \neq L_2$$



Neste caso, os limites laterais, sendo diferentes, concluir-se-á que $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

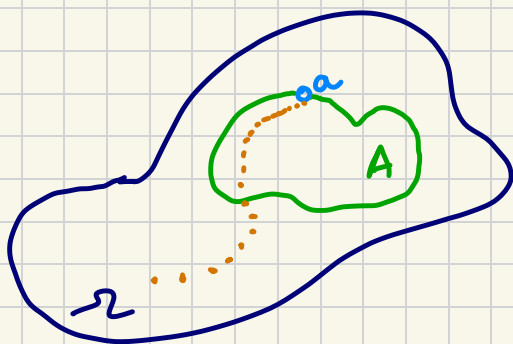
Queremos para funções escalares de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}$ um resultado similar a este.

Prop.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação de Ω .

Seja $A \subset \Omega$ subconjunto tal que $a \in \mathbb{R}^m$ também é ponto de acumulação de A .

Então,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x)$$



DEMONSTRA.: Sejam $A \subset \Omega \subset \mathbb{R}^m$; $a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação de A e de Ω .

$$\text{Seja } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que,

$$\forall x \in \Omega : x \in B_\delta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Em particular, $\forall x \in A \subset \Omega$, tem-se que

$$0 < d(x, a) < \delta ; \text{ e disso segue que } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

□

COROLÁRIO: Sejam $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$; $A, B \subset \Omega$ subconjuntos, com $a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação dos conjuntos $A, B \subset \Omega$. Então:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in B}} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

DEMONSTRA.: Por absurdo, se

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in B}} f(x) = L,$$

então pela proposição acima;

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = L ; \text{ e}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in B}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L ;$$

ou seja, $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \underline{\text{Abs!}}$

□

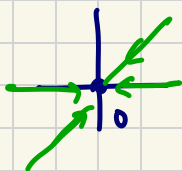
Obs: Quando $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x)$, na verdade

estamos calculando o limite por um caminho, dentro da conj. A

Ex-:

01) Verifique se $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^3 + y^3}$.

Solufão:



VAMOS USAR CAMINHOS DIFERENTES,
COMO SEQUE:

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y=0 \} - \text{eixo } x.$$

$$\begin{aligned} \circ \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in A}} f(x,y) &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{x^2 y}{x^3 + y^3} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{x^2 \cdot 0}{x^3 + 0^3} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{0}{x^3} = 0$$

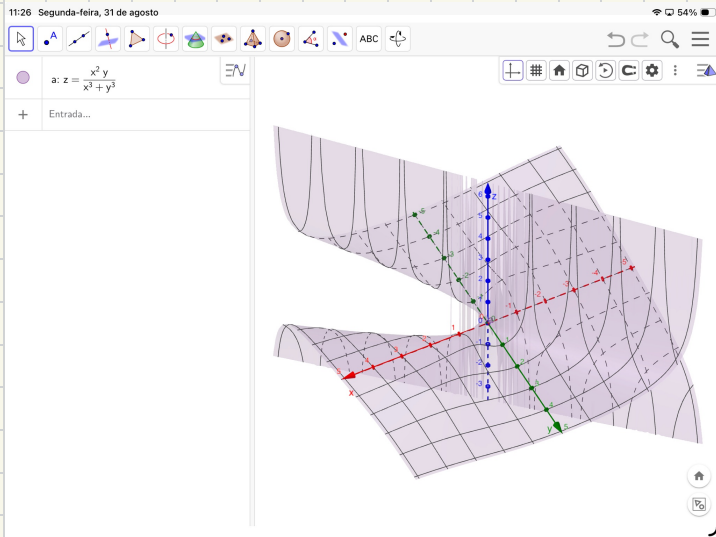
o $B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y=x \}$:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in B}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{x^2 y}{x^3 + y^3} =$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{x^2 \cdot x}{x^3 + x^3} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2} //$$

Então, $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} f(x,y) = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} f(x,y)$;

segue que $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$.



REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^3 + y^3}$, PLO

GEOMETRIA. NOTE QUE, QUANDO $(x,y) \rightarrow (0,0)$; A IMAGEM $f(x,y)$ "SE PERDE": indo PARA $+\infty$ OU PARA $-\infty$, CONFORME O CAMINHO QUE SE POSSA TOMAR.