

Na aula passada iniciamos o estudo das funções vetoriais

$$\vec{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$t \mapsto \vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t))$$

m funções coordenadas de uma variável real.

Vejamos mais um exemplo:

Ex.: $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\vec{f}(t) = (1+2t, t, t^2)$$

Neste caso, temos as funções coordenadas:

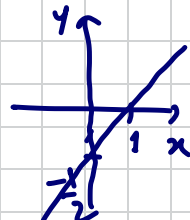
$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = t \\ z = t^2 \end{cases}$$

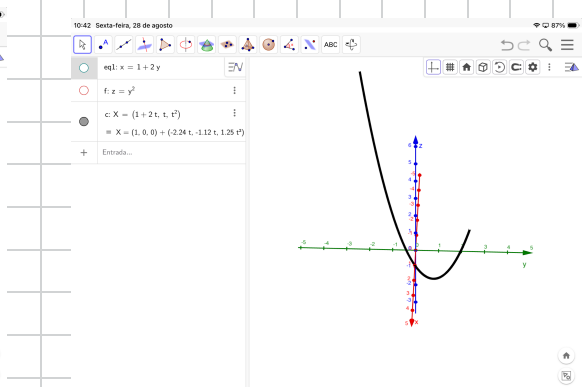
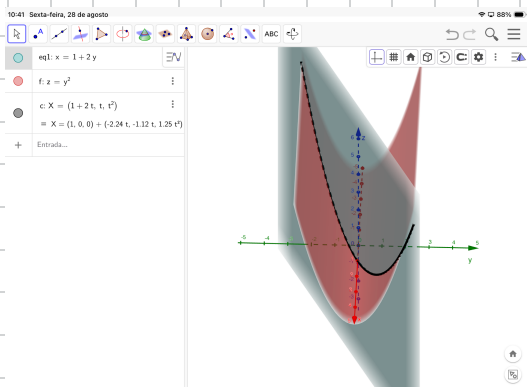
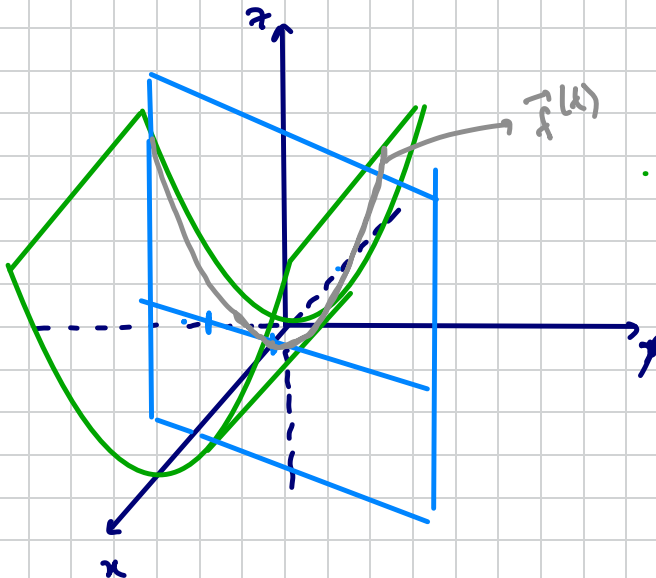
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1+2y \\ z = y^2 \end{cases}$$

no plano zy é uma parábola



reta no plano xy





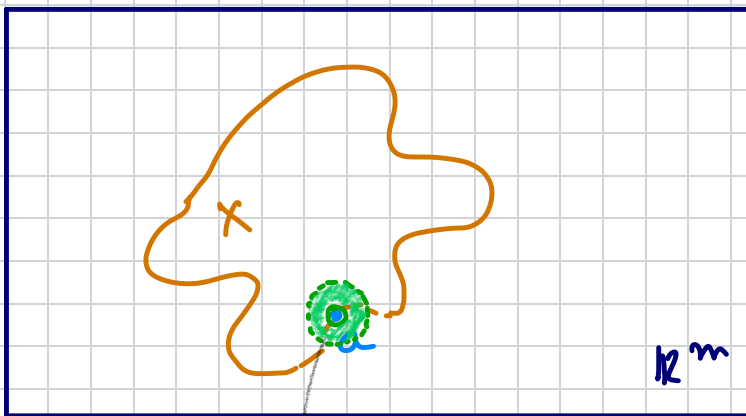
~~~~~

## LIMITES DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS

Def. Seja  $X \subset \mathbb{R}^m$  um conjunto não vazio.

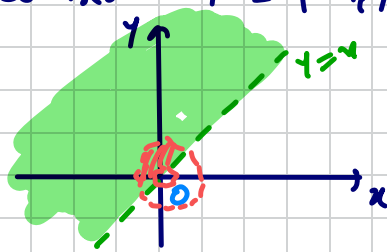
Dizemos que  $a \in \mathbb{R}^m$  é um ponto de acumulação do conjunto  $X$  se,  $\forall \delta > 0$

$$(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap X \neq \emptyset.$$



$B_\delta(a) \setminus \{a\}$  possui interseção não vazia com  $\text{conj. } X$ .

Ex: em  $\mathbb{R}^2$ , considere  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\}$



Neste caso, a origem  $(0,0) \notin X$ , mas  
 $\forall \delta > 0, (B_\delta(0,0) \setminus \{(0,0)\}) \cap X \neq \emptyset$

Logo, a origem  $(0,0)$  é um ponto de  
acumulação do conj.  $X$ .

Em frente a este conceito, definiremos:

Def. Seja  $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função  
de variáveis reais, e  $a \in \mathbb{R}^m$  um  
ponto de acumulação do conj.  $\Omega$ . Dizemos que  
 $l \in \mathbb{R}^n$  é o limite de  $f(x)$  quando  $x$   
tende para  $a$ , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l, \quad \text{se, e somente se,}$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que,  $\forall x \in \Omega$ :

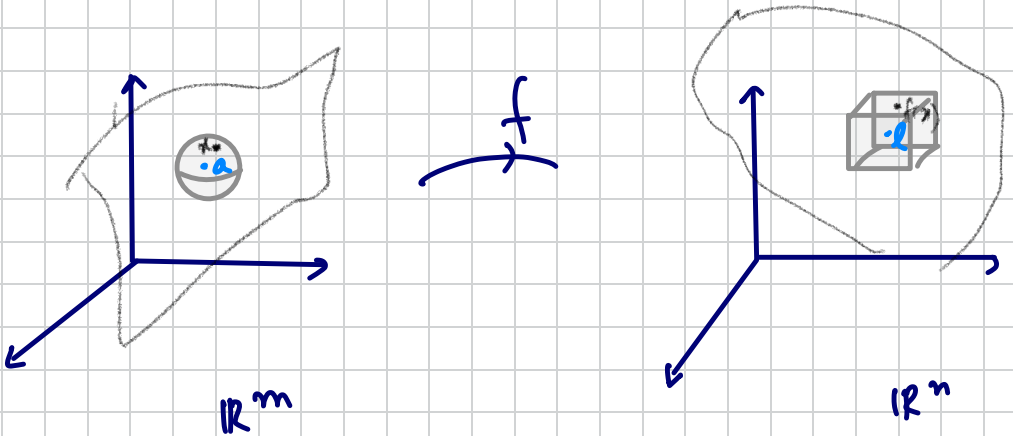
$$0 < d_{\mathbb{R}^m}(x, a) < \delta \Rightarrow d_{\mathbb{R}^n}(f(x), l) < \varepsilon;$$

e tais distâncias dependem das métricas  
usadas em  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$ .

Em linguagem de bolas;

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que};$$

$$\forall x \in B_\delta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(l).$$



Ex. 1.01)  $f: X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .  $a$  ponto de acumulação de  $X$ .

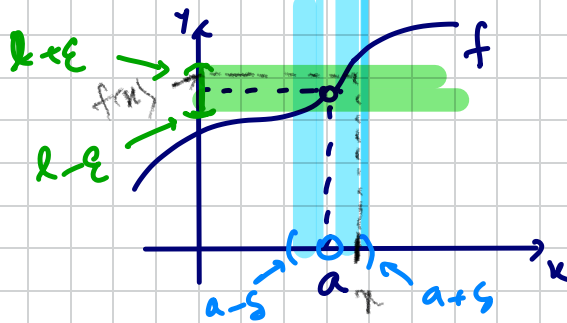
$l \in \mathbb{R}$  é o limite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow a$  e

exercemos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que},$$

$$\forall x \in X: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\underbrace{0 < |x - a| < \delta}_{0 < d(x, a) < \delta} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - l| < \varepsilon}_{d(f(x), l) < \varepsilon}$$



FIXADO  $\varepsilon > 0$ , CONSTRÓI-SE O INTERVALO  $(l-\varepsilon, l+\varepsilon) = B_\varepsilon(l)$

VAI EXISTIR  $\delta > 0$ ; TAL QUE CONSTRÓI-SE

$$B_\delta(a) \setminus \{a\} = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$$

SE  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ , ENTÃO,  $\forall x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$ ,

É GARANTIDO QUE  $|f(x) - l| < \varepsilon$ .

02)  $\vec{f}: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$   $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$

Vamos equipar  $\mathbb{R}$  pela métrica induzida pelo módulo, ou seja;  $d(x, y) = |x - y|$

Vamos equipar  $\mathbb{R}^2$  pela métrica euclidiana; ou seja;

$$d_2((x, y, z); (a, b, c)) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

Prim.°, dado  $a \in \mathbb{R}$ ,  $l = (l_1, l_2, l_3)$ ; entonces

$\lim_{t \rightarrow a} \vec{f}(t) = l$  significa que:

$\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que;

$$\forall t \in B_\delta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow \vec{f}(t) \in B_\varepsilon(l),$$

ou seja:

$$\forall t: 0 < |t - a| < \delta \Rightarrow d(\vec{f}(t), l) < \varepsilon, \text{ i.e.}$$

$$\sqrt{(f_1(t) - l_1)^2 + (f_2(t) - l_2)^2 + (f_3(t) - l_3)^2} < \varepsilon$$

