

Encerramos a aula passada estudando gráficos do domínio de uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$.

Mais um exemplo; de uma prova antiga:

Questão 04. Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \sqrt{x-y} + \ln(1-xy)$.

(a) [1,0 pt] Obtenha o domínio Ω e o esboço gráfico do domínio.

solução: condições de existência.

$$f(x, y) = \underbrace{\sqrt{x-y}}_{\geq 0} + \ln \underbrace{(1-xy)}_{> 0}$$

$$\bullet x-y \geq 0 \implies x \geq y \implies y \leq x$$

$$\bullet 1-xy > 0$$

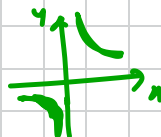
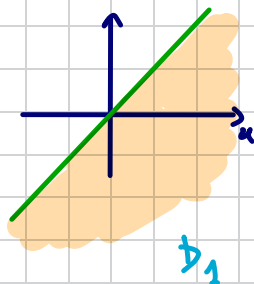
$$\Downarrow$$

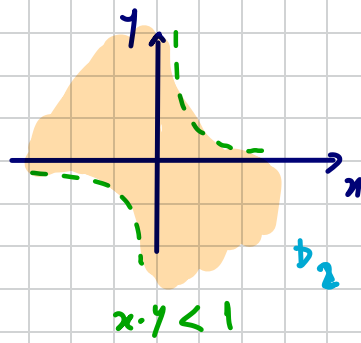
$$-xy > -1$$

$$xy < 1$$

"pensando com igualdade,
tentamos:

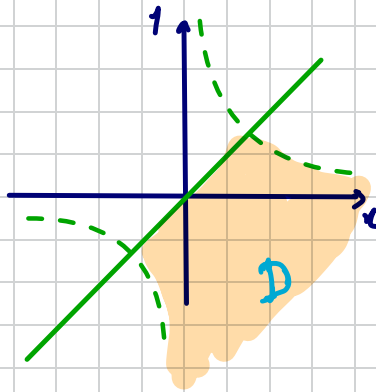
$$xy = 1 \implies y = \frac{1}{x} \text{ (hipérbole)}$$





⊕ Domínio de f será dado por

$$D = D_1 \cap D_2 :$$



$$D(f) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1 \text{ e } y \leq x \}.$$

FUNÇÕES VETORIAIS DE UMA VARIÁVEL REAL

Seja função $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$.

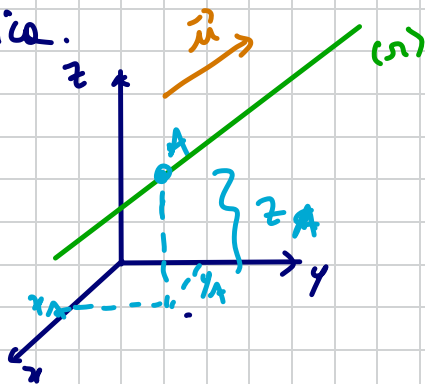
$$t \in [a, b] \rightarrow f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)),$$

onde cada $f_j: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Ex.: Da Geometria Analítica (ou ALGA), do estudo da equação da reta no $\mathbb{R}^3$, uma reta (r) passando por um ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ e possuindo o vetor $\vec{u} = (a, b, c)$ como vetor diretor, possui as equações.

$$(r): \begin{cases} x = x_A + a t \\ y = y_A + b t \\ z = z_A + c t \end{cases},$$

na forma paramétrica.



Em termos de funções temos que esta mesma reta é descrita por:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto (\underbrace{x_A + at}_{f_1(t)}, \underbrace{y_A + bt}_{f_2(t)}, \underbrace{z_A + ct}_{f_3(t)})$$

(funções coordenadas)

Normalmente a indicação da função é feita por uma reta, indicando a representação de um vetor, ou seja, costuma-se escrever:

$$\vec{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t));$$

onde $f_1, f_2, \dots, f_m: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

○ Domínio de uma função vetorial

$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t))$ é dado por:

$$D(f) = D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_m, \quad \text{onde}$$

D_i é o domínio de f_i , $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, isto é, é a interseção dos domínios de todas as funções coordenadas que definem a função vetorial $\vec{f}$.

Vejam os alguns exemplos de construção gráfica (em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$)

Ex: Esboce o gráfico de cada função a seguir:

$$(a) \quad \vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{f}(t) = (t^2, t)$$

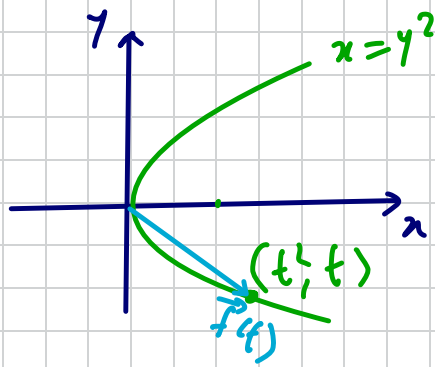
Solução: Neste caso, temos

$$f_1(t) = x(t) = t^2$$

$$f_2(t) = y(t) = t$$

ou seja,

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases} > \boxed{x = y^2} \quad \text{PARÁBOLA}$$

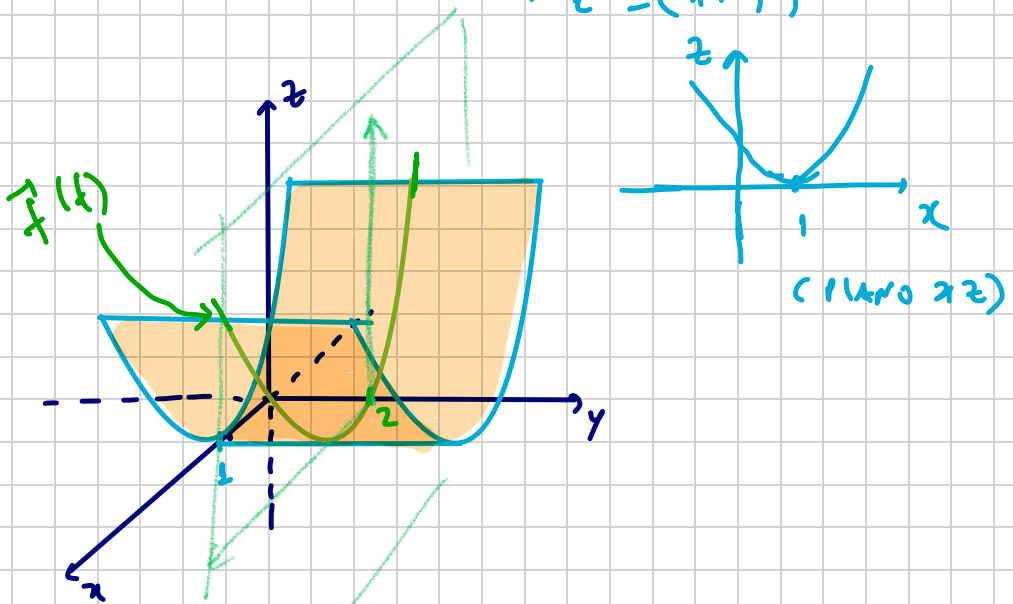


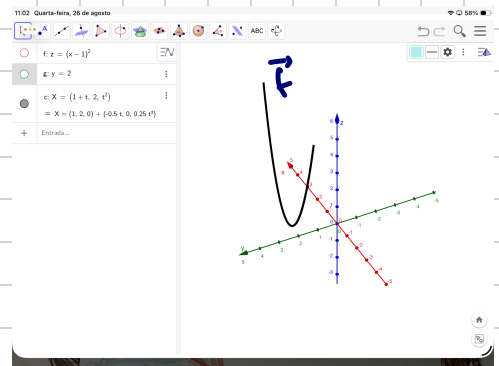
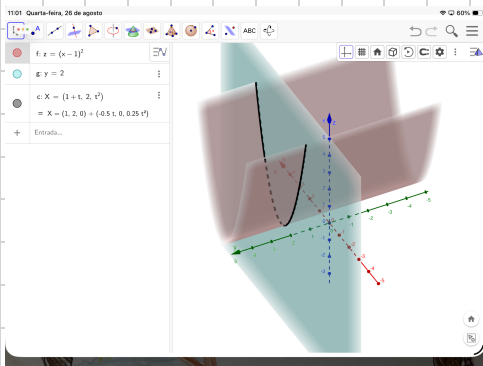
(b) $\vec{f}(t) = (1+t, 2, t^2)$

solução: Neste caso, tem-se:

$$\begin{cases} x = 1+t \rightarrow t = x-1 \\ \boxed{y = 2} \\ z = t^2 \end{cases}$$

$$z = (x-1)^2$$





REPRESENTAÇÕES PELO GEOGEBRA. A PRIMEIRA, COM AS SUPERFÍCIES AUXILIARES. A SEGUNDA IMAGEM, O GRÁFICO FINAL DA $\vec{f}$.

03) $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{f}(t) = (\sin t, \cos t, 1)$

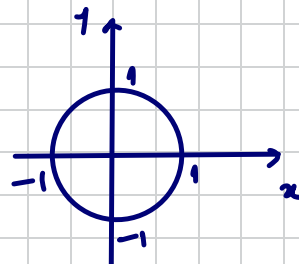
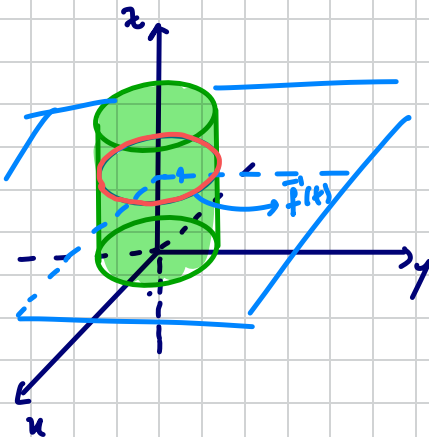
$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$

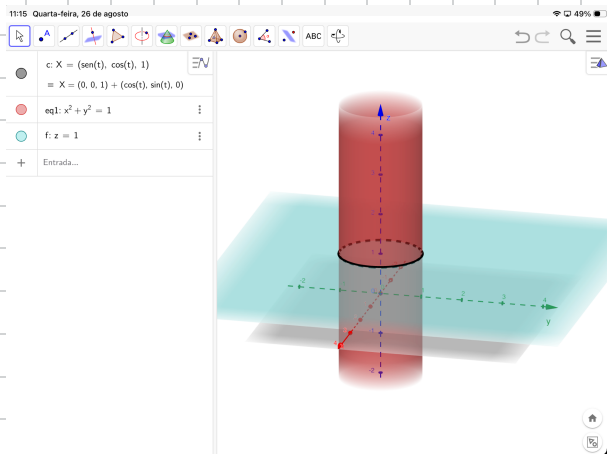
$z = 1$

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ (RELAÇÃO TRIGONOMÉTRICA FUNDAMENTAL)

$x^2 + y^2 = 1$

↑
circunferência no plano xy
centrada na origem e raio 1.



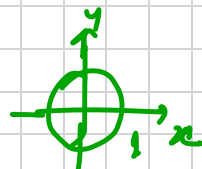


04) $\vec{r}(t) = (\sin t, \cos t, t)$

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \\ \boxed{z = t} \end{cases}$$

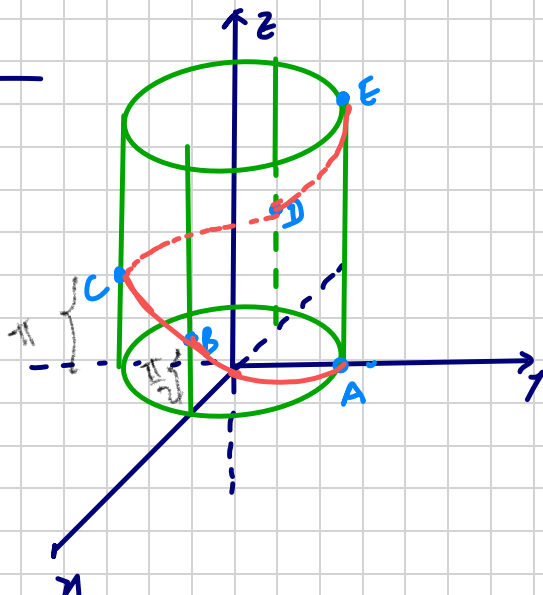
$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

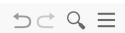
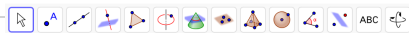
$$x^2 + y^2 = 1.$$



circunferência no plano xy .

	$x = \sin t$	$y = \cos t$	$z = t$
A:	0	1	0
B:	1	0	$\frac{\pi}{2}$
C:	0	-1	π
D:	-1	0	$\frac{3\pi}{2}$
E:	0	1	2π





$a = \text{Curva}((\sin(t), \cos(t), t), t, 0, 2)$
 $= (\sin(t), \cos(t), t), \quad (0 \leq t \leq 6.28)$

$\text{eq1: } x^2 + y^2 = 1$

+ Entrada...

