

Nesta aula vamos iniciamos o estudo de funções de várias variáveis reais. Vamos alguns esboços gráficos de funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$.

Vejamos outros exemplos.

$$07) f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

Obtenha o domínio, a imagem e um esboço gráfico de f .

Solução: $z = f(x, y)$

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}. \text{ Elevando ao quadrado,}$$

temos:

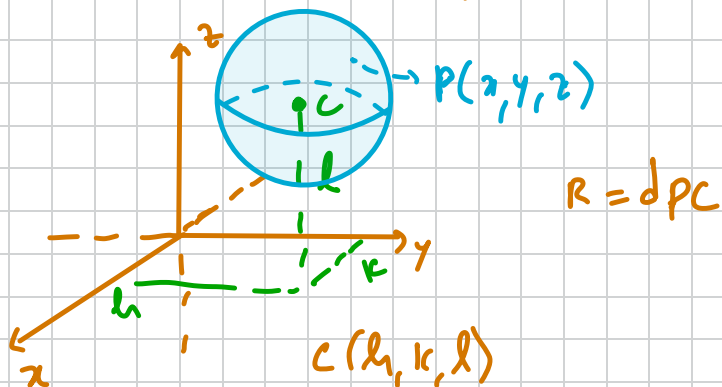
$$z^2 = 9 - x^2 - y^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x^2 + y^2 + z^2 = 9}, \text{ que representa}$$

uma esfera centrada na origem e raio 3.

[Obs.: Recorde que, a eq. de uma esfera de raio $R > 0$ centrada em $C(h, k, l)$, é dada

por: $(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = R^2$



$$d_2 = d_{PC} = \sqrt{(x_p - x_c)^2 + (y_p - y_c)^2 + (z_p - z_c)^2} = R$$

↑
métrica euclidiana.

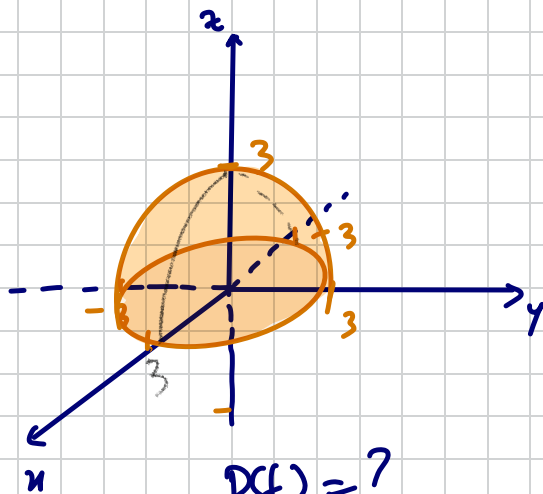
$$\begin{aligned} \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2} &= R \\ \Rightarrow \boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2} &= R^2 \end{aligned}$$

Voltando à solução do exercício: o gráfico de f é dado por $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $z \geq 0$

por $z = f(x, y)$

$$= \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

CALOTA SUPERIOR



$$D(f) = ?$$

$$Im(f) = ?$$

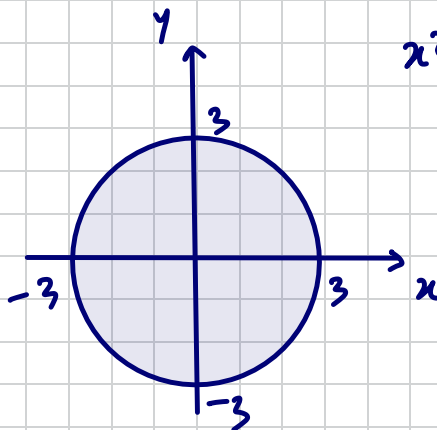
$D(f)$: onde a expressão tem sentido.

$$f(x, y) = \sqrt{\underbrace{9 - x^2 - y^2}_{\geq 0}} \Leftrightarrow 9 - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 9 \geq x^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 \leq 9.$$

Gráfico
do domínio.



$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$$

$\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}$ (eixo z)

Se o eixo gráfico de f temos que
 $\text{Im}(f) = [0, 3]$.

08) $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$

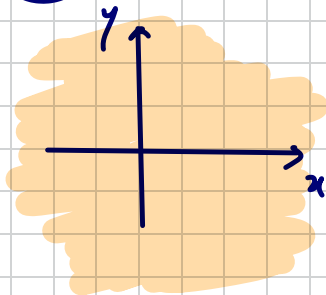
$DH = ?$ $\text{Im}(f) = ?$

gráfico de $f = ?$ gráfico do domínio?

Como não há restrições para x e y em

$z = x^2 - y^2$, segue que $DH = \mathbb{R}^2$.

gráfico do domínio: todo o plano $\mathbb{R}^2$.



então gráfico: $z = x^2 - y^2$

$z = \text{altura:}$

z	equação obtida:
- 4	$x^2 - y^2 = -4 \Rightarrow y^2 - x^2 = 4$ HIPÉRBOLE EIXO REAL y
- 2	$x^2 - y^2 = -2 \Rightarrow y^2 - x^2 = 2$ HIPÉRBOLE EIXO REAL y
- 1	$x^2 - y^2 = -1 \Rightarrow y^2 - x^2 = 1$ HIPÉRBOLE EIXO REAL y
0	$x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x+y) \cdot (x-y) = 0$ RETAS BISSETRIZES
1	$x^2 - y^2 = 1$ HIPÉRBOLE COM EIXO REAL x
2	$x^2 - y^2 = 2$ HIPÉRBOLE COM EIXO REAL x
4	$x^2 - y^2 = 4$ HIPÉRBOLE COM EIXO REAL x .

PLANO
 xy

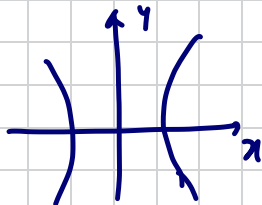
$$(x+y)(x-y) = 0$$

$$x+y=0 \rightarrow x=-y$$

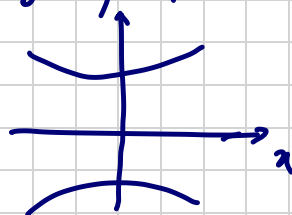
$$x-y=0 \rightarrow x=y$$

obs.: hipérbolas:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$



esboço gráfico de f : $f(x, y) = z = x^2 - y^2$

traços: • $z = 0$: $x^2 - y^2 = 0$

$$(x+y)(x-y) = 0$$

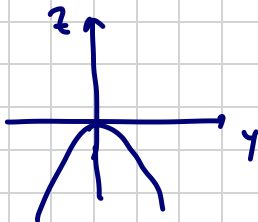
$$\left[\begin{array}{l} x = y \text{ ou} \\ x = -y \end{array} \right] \text{ linhas.}$$

• $y = 0$:

$$z = x^2 \text{ (parábola)}$$



• $x = 0$: $z = -y^2$ (parábola)



$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}$$

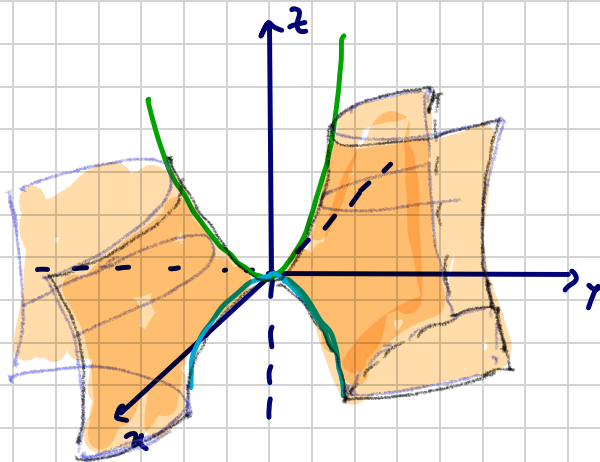


GRÁFICO DO DOMÍNIO Para funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ podemos obter o esboço gráfico do domínio analisando as condições de existência impostas pela expressão que define f .

ex.: Obtenha o domínio e o gráfico do domínio de cada função abaixo:

(a) $f(x, y) = \sqrt{1 - x + y^2}$.

sol.: cond. de existência:

$$1 - x + y^2 \geq 0$$

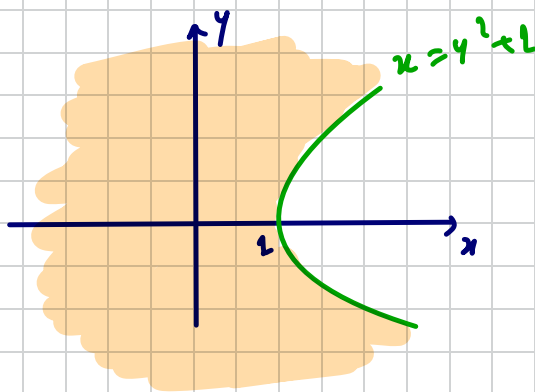
$$-x \geq -y^2 - 1 \quad (x-1)$$

$$x \leq y^2 + 1$$

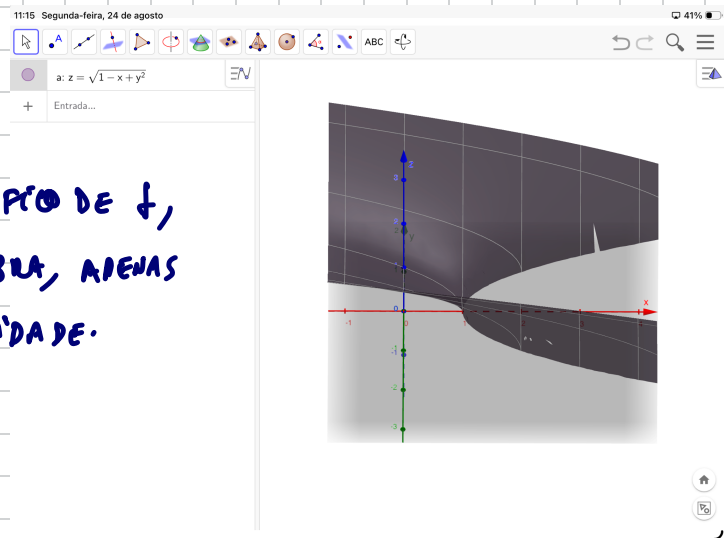
$$D(f) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y^2 + 1 \}$$

gráfico do domínio:

Note que $x = y^2 + 1$ é uma parábola com os eixos "trocados".



USEI O GRÁFICO DE f ,
PELO GEOGEBRA, APENAS
POR CURIOSIDADE.



$$(b) \quad f(x, y) = \ln(x - 2y)$$

$D(f) = ?$ gráfico do domínio: ?

solução: COND. DE EXISTÊNCIA. $\ln w \Rightarrow w > 0$

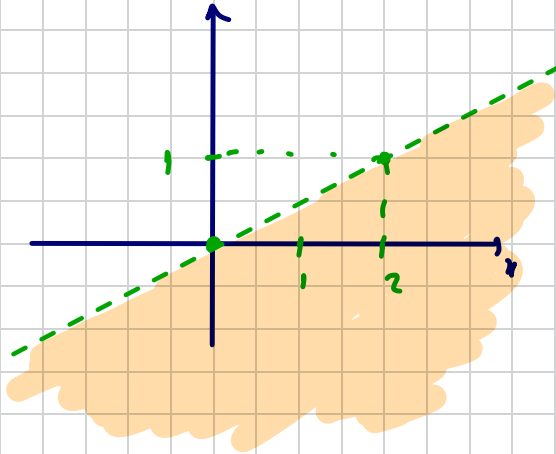
$$x - 2y > 0 \Rightarrow x > 2y$$

$$D(f) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 2y \}.$$

gráfico do domínio:

$$x = 2y \text{ (reta)}$$

(PONT/LHADA)
">"

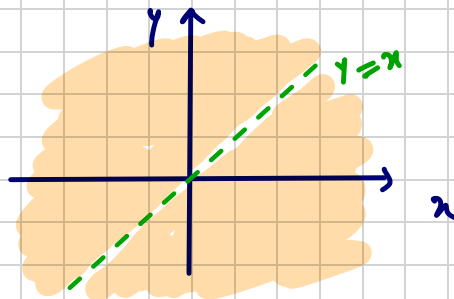


$$(c) \quad f(x, y) = \sin \frac{1}{x-y}.$$

$D(f) = ?$ gráfico do domínio?

cond. de existência $x - y \neq 0 \Leftrightarrow x \neq y$

$$D(f) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y \}.$$

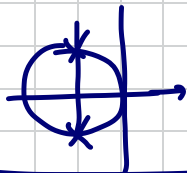


$$(d) f(x,y) = \arctan(x+y)$$

$D(f) = ?$ gráfico do domínio.

obs.

$$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$$



$$\nexists \tan y \Leftrightarrow y = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

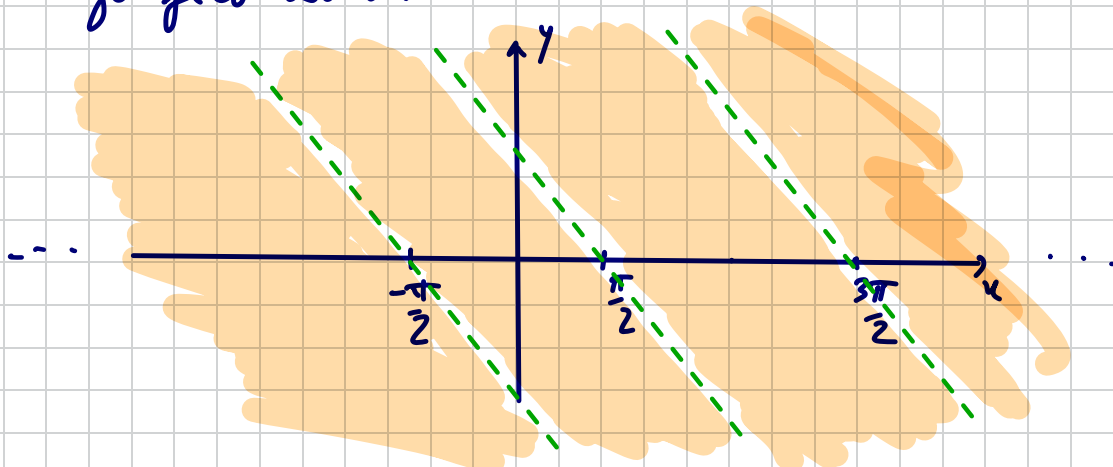
Não mono cov.

$$\nexists f \Leftrightarrow x+y = k\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$y = -x + k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R} : y \neq -x + k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$$

gráfico do domínio:



Obs. As funções $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, quando a imagem for no conj. $\mathbb{R}$ dos números reais, são chamados de Funções Escalares.
