

Na aula passada iniciamos o estudo de campos
vetoriais: $\vec{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto \vec{F}(x) = (F_1(x_1, \dots, x_m), \dots, F_m(x_1, \dots, x_m))$$

Vimos que um campo $\vec{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um
campo gradiente (conservativo) se $\exists \varphi: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$,
tal que $\nabla \varphi = \vec{F}$.

(φ também é chamada de FUNÇÃO POTENCIAL)

Ao que segue, apresentamos um resultado importante:
PROPOSIÇÃO: Um campo vetorial $\vec{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado
por $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ é um campo
gradiente se, e somente se,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{e} \quad \text{forem contínuas.}$$

A demonstração será omitida, mas mais adiante
ficará mostrado.

Ex: Da aula passada, mostramos que

$$\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$F(x, y) = (y^2 + 2x + 4, 2xy + 4y - 5)$$

e' um campo gradiente, obtendo, naquela ocasião, a função potencial ϕ .

De fato, sendo

$$P(x, y) = y^2 + 2x + 4 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2y$$

$$Q(x, y) = 2xy + 4y - 5 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \text{ e são contínuas.}$$

Logo, $\vec{F}$ é um campo gradiente.

DIVERGÊNCIA DE UM CAMPO VETORIAL:

Def.: Seja $\vec{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ um campo vetorial.

Definimos o divergente do campo $\vec{F}$ por:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{tr}(j(\vec{F})),$$

ou seja, o divergente do campo $\vec{F}$ corresponde ao traço da matriz Jacobiana de $\vec{F}$

(Obs: o traço de uma matriz quadrada é a soma dos elementos da diagonal principal)

Ou seja, sendo $\vec{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, então; como
 $\vec{F} = (F_1(x_1, \dots, x_m), F_2(x_1, \dots, x_m), \dots, F_m(x_1, \dots, x_m))$

segue que

$$j(\vec{F}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \end{bmatrix}_{m \times m}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\vec{F}) = \operatorname{tr}(j(\vec{F})) = \\ = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial x_m}.$$

ex: $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $F(x, y, z) = (\underbrace{x^3 y z^2}_{F_1}, \underbrace{x - 2y}_{F_2}, \underbrace{z^3}_{F_3})$
 $\Rightarrow \operatorname{div}(\vec{F}) = ?$

Solução: $\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (x^3 y z^2) + \frac{\partial}{\partial y} (x - 2y) + \frac{\partial}{\partial z} (z^3)$$

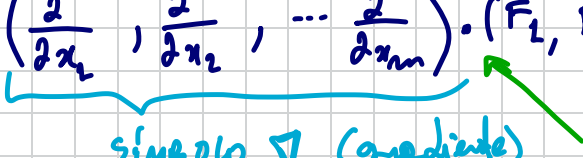
$$= 3x^2 y z^2 + (-2) + 3z^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{F} = 3x^2 y z^2 - 2 + 3z^2}$$

obs: O divergente de um campo vetorial $\vec{F}$ também é simbolicamente denotado em termos de operadores, como segue:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial x_m}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right) \cdot (F_1, F_2, \dots, F_m) = \nabla \cdot \vec{F}$$


 símbolo ∇ (gradiente)

PENSADO COMO SE FOSSE PRODUTO ESCALAR.

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F}.$$

ROTACIONAL DE UM CAMPO VETORIAL:

Def.: Seja $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial
do $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

Definimos o rotacional desse campo $\vec{F}$ por:

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Esta fórmula é um tanto difícil de lembrar.

No entanto, existe uma forma mnemônica, ou seja, simbólica, de o representar, como segue:

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Diagram illustrating the mnemonic for the curl formula using a determinant. The first row contains unit vectors $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. The second row contains partial derivatives $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$. The third row contains the components of the vector field P, Q, R . Blue arrows indicate the expansion along the first row: $\vec{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$. Green arrows show the calculation of the partial derivatives for each component.

→ POR EXEMPLO, AQUI INDICA QUE,
NA DIREÇÃO DO VETOR $\vec{i}$, CALCULAMOS
 $\frac{\partial R}{\partial y}$; ETC.

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Se o campo $\vec{F}$ representar o escoamento de um fluido o rotacional mede o quanto o mesmo pode "girar", como alguns redemoinhos, por exemplo.

Quando $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$, dizemos que o campo é irrotacional, ou um campo gradiente ou conservativo.

Neste caso, temos:

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Ex. $\vec{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$F(x, y, z) = (\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_P, \underbrace{\sin(x^2 - z^2)}_Q, \underbrace{xy^2}_R)$$

$\text{rot } \vec{F} = ?$

Solução:

$\text{rot } \vec{F} =$

$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$	$\vec{i}$	$\vec{j}$
$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial z}$	$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial y}$
$x^2 + y^2 + z^2$	$\sin(x^2 - z^2)$	xy^2	$x^2 + y^2 + z^2$	$\sin(x^2 - z^2)$

Diagram showing the calculation of the curl using the determinant method. Green lines connect the first column to the second and third columns. Blue lines connect the second column to the third column. The signs for the first column are $+$, $-$, $+$. The signs for the second column are $-$, $+$, $-$. The signs for the third column are $+$, $-$, $+$.

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y} (xy^2) - \frac{\partial}{\partial z} (\sin(x^2 - z^2)) \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2) - \frac{\partial}{\partial x} (xy^2) \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} (\sin(x^2 - z^2)) - \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2) \right) \vec{k}$$

$$= (2xy - \cos(x^2 - z^2)(-2z), 2z - y^2, \cos(x^2 - z^2) \cdot 2x - 2y)$$

$$= (2xy + 2z \cdot \cos(x^2 - z^2), 2z - y^2, 2x \cdot \cos(x^2 - z^2) - 2y)$$

Obs.: Da mesma forma que o divergente
de um campo vetorial pode ser representado
em termos de operadores, o rotacional também,

com regra:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ p & q & r \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)}_{\vec{\nabla}} \times \underbrace{(p, q, r)}_{\vec{F}} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

$$\Rightarrow \text{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

↑
PENSANDO COMO UM PRODUTO VETORIAL

Uma propriedade interessante:

$$\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0$$

De fato, basta fazer: como

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\underbrace{\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}}_{F_2}, \underbrace{\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}}_{F_2}, \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}_{F_3} \right);$$

então:

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{rot } \vec{F}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \cancel{\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x}} + \cancel{\frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x}} - \cancel{\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Uma forma mais rápida de mostrar:

$$\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = \nabla \cdot (\text{rot } \vec{F}) = \nabla \cdot (\underbrace{\nabla \times \vec{F}}_{\text{produto misto (ALGA)}}) =$$

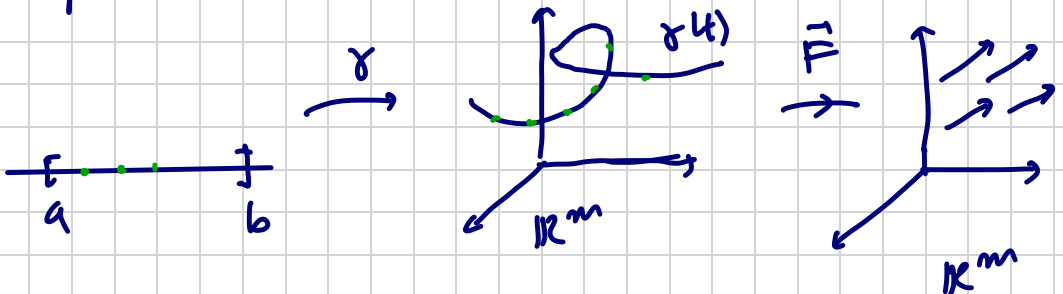
$$= (\underbrace{\nabla \times \nabla}_{\vec{0}}) \cdot \vec{F} = 0$$

obs.: Também se mostra que
 $\text{rot}(\text{div } \vec{F}) = \vec{0}$. (exercício)

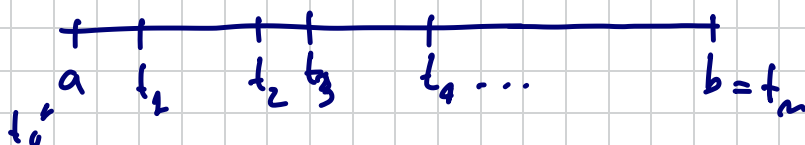
INTEGRAIS DE LINHA:

Seja $\gamma: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma curva no $\mathbb{R}^m$;
 suave (ou seja γ é derivável, e $\gamma'(t) \neq 0$,
 $\forall t \in [a, b]$)

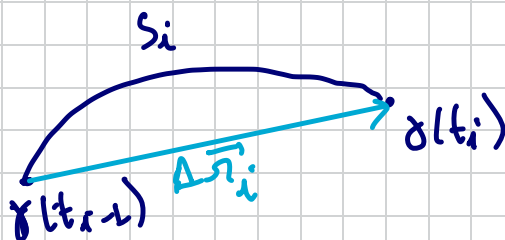
Considere $\vec{F}: \Omega = \gamma([a, b]) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ um
 campo vetorial.



Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$ dividindo-o em n subintervalos da forma $[t_{i-1}, t_i]$



Esta partição determina cordões s_i , sobre γ , dos pontos $\gamma(t_{i-1})$ a $\gamma(t_i)$.



$$\text{Seja } \Delta \vec{\gamma}_i = \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}).$$

Como γ é suave (derivável e contínua, com $\gamma'(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$), então, pelo T.V.M.

$\exists d_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$\gamma'(d_i) = \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}},$$

ou seja

$$\underbrace{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}_{\Delta \vec{\gamma}_i} = \gamma'(d_i) \cdot \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\Delta t_i}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{\gamma}_i = \gamma'(d_i) \cdot \Delta t_i$$

Assim, montamos a soma de Riemann:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}(\gamma(t_i)) \cdot \Delta \vec{\gamma}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}(\gamma(t_i)) \cdot \gamma'(d_i) \Delta t_i$$

Tomando o limite com $n \rightarrow \infty$, temos obter:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{i=1}^n \vec{F}(\gamma(t_i)) \cdot \Delta \vec{\gamma}_i}_I = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\vec{F}(\gamma(t_i)) \cdot \gamma'(d_i) \Delta t_i}_{II}$$
$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Este é a definição do integral do campo $\vec{F}$ ao longo do caminho γ .

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} := \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \cdot dt$$

Ex.1 Dado o campo $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, calcule a integral de linha de $\vec{F}$ ao longo da helice $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ em $[0, 2\pi]$.

Solução:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = ?$$

$$\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$$

$$\vec{F}(\gamma(t)) = \vec{F}(\cos t, \sin t, t) = (\cos t, \sin t, t)$$

$$\gamma'(t) = ?$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

$$\Rightarrow \gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

Assim:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos t, \sin t, t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1) \cdot dt$$

PRODUTO ESCALAR.

$$= \int_0^{2\pi} (-\cancel{\cos t} \cdot \cancel{\sin t} + \cancel{\sin t} \cdot \cancel{\cos t} + t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{(2\pi)^2}{2} - 0 = \underline{\underline{2\pi^2}}$$

~~~~~