

Na aula passada iniciamos o estudo de integrais de linha.

Seja $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma curva suave,
e $\vec{F}: \mathcal{C} = \gamma([a, b]) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ um campo vetorial,
então, definiremos a integral de linha de $\vec{F}$ ao longo da curva γ por:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \cdot dt$$

↑
PRODUTO ESCALAR.

Seja $\vec{F}$ um campo vetorial do $\mathbb{R}^3$, ou seja,
 $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$

e seja $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$

Uma outra forma de calcular (e representar) uma integral de linha é:

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \cdot dt = \\
 &= \int_a^b (P(\gamma(t)), Q(\gamma(t)), R(\gamma(t))) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) \cdot dt \\
 &= \int_a^b (P, Q, R) \cdot (\underbrace{x'(t) \cdot dt}_{dz}, \underbrace{y'(t) \cdot dt}_{dy}, \underbrace{z'(t) \cdot dt}_{dx}) =
 \end{aligned}$$

↑
↑
↑
DIFERENCIAIS, COMO
NO CÁLCULO 1.

$$\begin{aligned}
 &= \int_a^b (P, Q, R) \cdot (dx, dy, dz) = \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad \text{PRODUTO ESCALAR}
 \end{aligned}$$

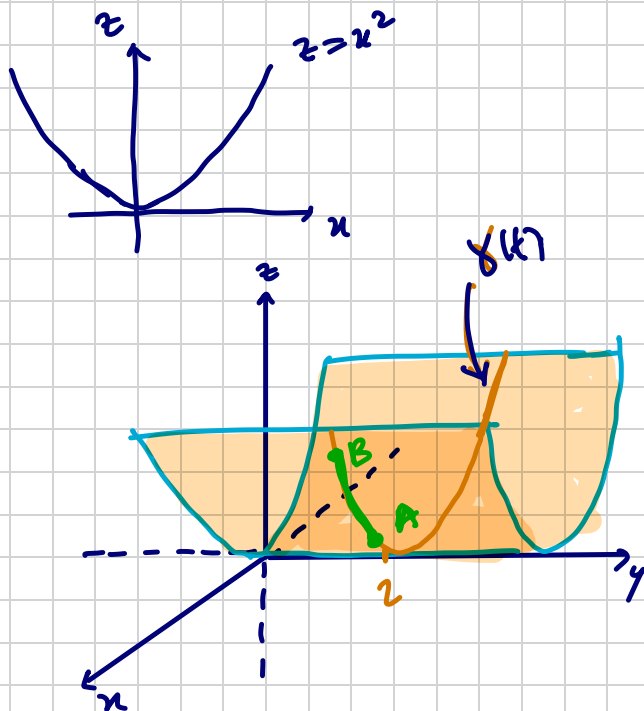
$$\int_a^b P dx + Q dy + R dz$$

conclusão:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \\ = \int_a^b P dx + Q dy + R dz$$

Ex.1 Calcule $\int_{\gamma} z x dx + y z dy + 3z dz$ ao longo da parábola $z=x^2, y=2$ de $A(0,2,0)$ a $B(2,2,4)$.

Solução:



Precisamos encontrar uma parametrização para $\gamma(t)$. Para isso, basta notar que:

$$\gamma: z = t^2; y = 2$$

$$\gamma: \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = t^2 \end{cases}$$

$$\text{de } A(\underline{0}, 2, 0) \text{ e } B(\underline{2}, 2, 4)$$

$$t = 0 \text{ até } t = 2$$

$$\Rightarrow t \in [0, 2]$$

Dessa forma, temos

$$\begin{cases} x = t \Rightarrow dx = dt \\ y = 2 \Rightarrow dy = 0 \\ z = t^2 \Rightarrow dz = 2t \cdot dt \end{cases}$$

, então,

$$\int_{\gamma} 2x dx + yz dy + 3z dz = \int_0^2 2 \cdot t \cdot dt + \underbrace{2 \cdot t^2 \cdot 0}_0 + 3 \cdot t^2 \cdot 2t dt$$

$$= \int_0^2 2t dt + 6t^3 dt = \left(t^2 + \frac{3t^4}{2} \right) \Big|_0^2 =$$

$$= (2)^2 + \frac{3 \cdot (2)^4}{2} - 0 = 4 + 3 \cdot 8 = 28 //$$

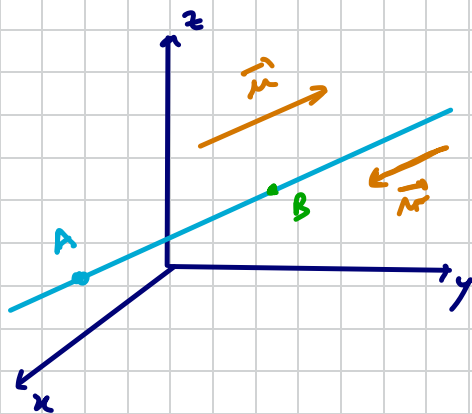
Obs.: Da geometria Analítica, sabemos que, por exemplo, uma mesma reta pode possuir várias parametrizações diferentes, representando o mesmo lugar geométrico (a reta). Por exemplo; se $\vec{u} = (a, b, c)$ for um vetor diretor para uma reta (r) , passando por $A(x_A, y_A, z_A)$, então, a eq. paramétrica da reta (r) é dada por:

$$(r): \begin{cases} x = x_A + a \cdot t \\ y = y_A + b \cdot t \\ z = z_A + c \cdot t \end{cases}$$

Mas, se tomarmos sobre a mesma reta (r) um outro ponto $B(x_B, y_B, z_B)$

e um outro vetor $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$, também diretor de (r) , teremos:

$$(r): \begin{cases} x = x_B + \alpha t \\ y = y_B + \beta t \\ z = z_B + \gamma t \end{cases}$$



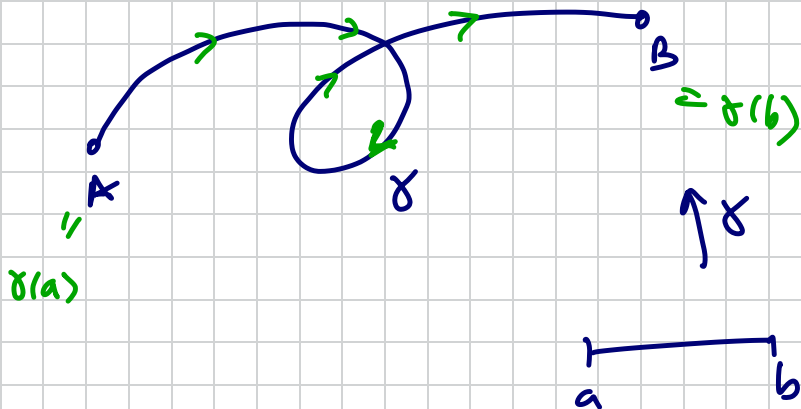
Isso vale para qualquer curva.

A grande questão: isso afetaria no resultado de uma integral de linha

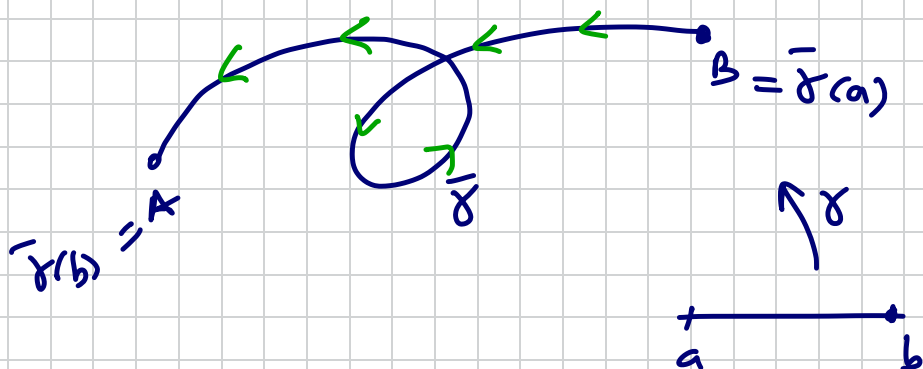
$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt ?$$

Infelizmente, a resposta é negativa, ou seja, não se altera o resultado da integral, desde que preserve a mesma orientação.

Def. Dizemos que uma curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, com $\gamma(a) = A$ e $\gamma(b) = B$ possui uma orientação de A para B.



Digamos que uma curva $\bar{\gamma}$ possui orientação contrária à curva γ se possui o mesmo traçado de γ , mas $\bar{\gamma}(a) = B$ e $\bar{\gamma}(b) = A$



Com isso, tem-se o seguinte resultado, cuja demonstração ficará omitida:

PROPOSIÇÃO: Uma integral de linha $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}$

independe da parametrização da curva γ , desde que mantenha a mesma orientação.

Ou seja; se γ e $\bar{\gamma}$ possuem mesma orientação

$$\int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \vec{F}(\bar{\gamma}(t)) \cdot \bar{\gamma}'(t) dt$$

Ex! Vamos calcular novamente

$$\int_{\gamma} 2x dx + 4z dy + 3z dz$$

ao longo da parábola $z=x^2$, $y=2$ de $A(0,2,0)$ ao ponto $B(2,2,4)$ usando outra parametrização.

$$\bar{\gamma}: z=x^2, y=2$$

$$\bar{\gamma} = \begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = 2 \\ \underline{z = t} \end{cases}$$

$$A(0, 2, \underline{0})$$

$$B(\underline{2}, 2, \underline{4})$$

$$t \in [0, 4]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dx = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \\ y = 2 \Rightarrow dy = 0 \\ z = t \Rightarrow dz = dt \end{array} \right.$$

Disso, teremos:

$$\int 2x dx + 4z dy + 3z dz =$$

$$\int_0^4 \cancel{2 \cdot \sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\cancel{2\sqrt{t}}} dt + \underbrace{2 \cdot t \cdot 0}_{=0} + 3 \cdot t \cdot dt =$$

$$= \int_0^4 (dt + 3t dt) = \left(t + \frac{3t^2}{2} \right) \Big|_0^4 =$$

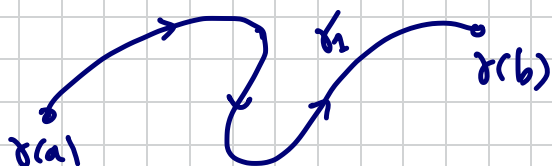
$$= 4 + \frac{3 \cdot (4)^2}{2} - 0 = 4 + 3 \cdot 8 = 28 //$$

T.F.C. PARA INTEGRAIS DE LINHA.

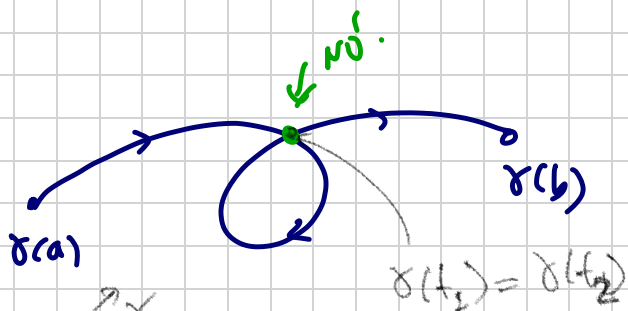
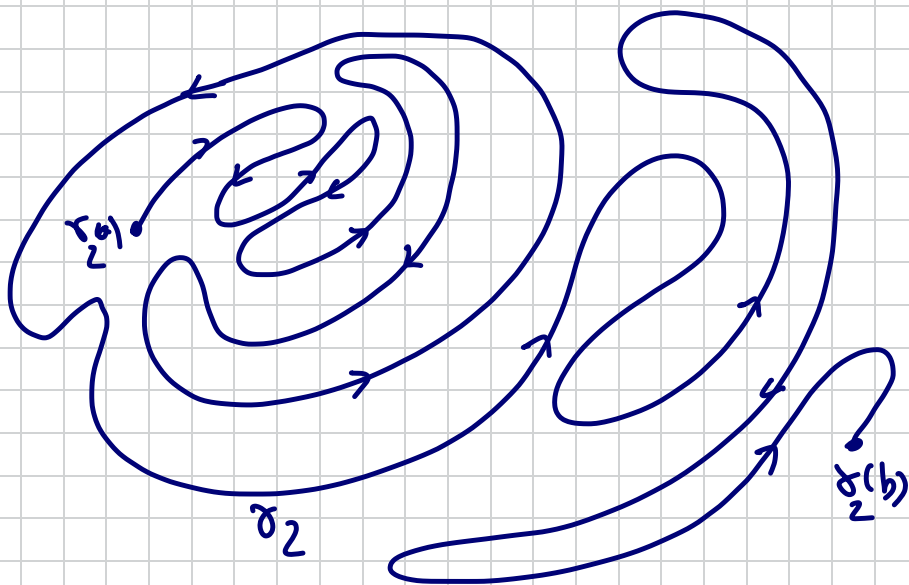
Nó que segue, apresentaremos uma revisão vetorial para o T.F.C (aplicado para as integrais de linha).

Antes, porém, definiremos alguns conceitos:

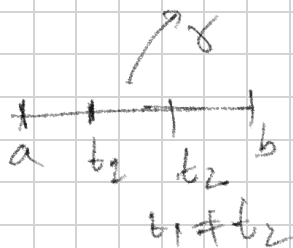
Def. Dizemos que uma curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma curva simples quando não possui nós, ou seja, se $\forall t_1, t_2 \in [a, b]; t_1 \neq t_2$, não ocorre $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$.



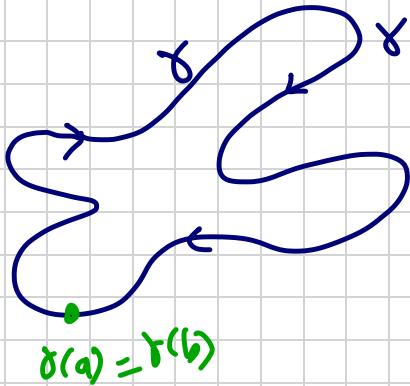
γ_1 e γ_2 :
CURVAS SIMPLES,
ABERTAS.



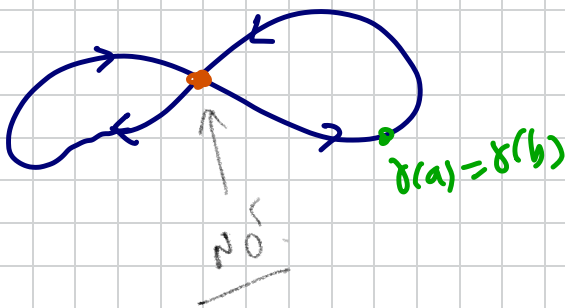
$\Rightarrow$ CURVA N\u00c3O-SIMPLES,
ABERTA.



Def.: Uma curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dita fechada quando $\gamma(a) = \gamma(b)$.



$\Rightarrow$ CURVA γ FECHADA, SIMPLES.



$\Rightarrow$ CURVA FECHADA E
NÃO-SIMPLES.

Em frente a estes conceitos, temos o seguinte resultado:

TEOREMA (T.F.C para integrais de linha)

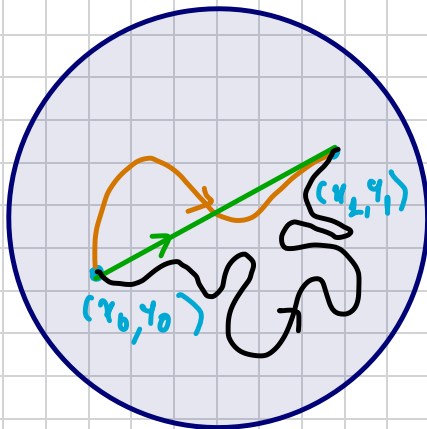
Seja γ uma curva seccionalmente suave, simples, definida em um disco do $\mathbb{R}^2$, do ponto (x_0, y_0) ao ponto (x_1, y_1) . Se $\vec{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ for um campo conservativo, então, a integral

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\pi}$$

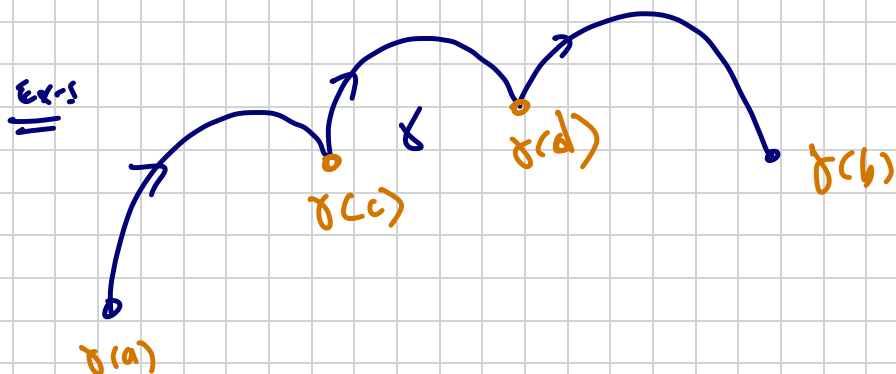
é independente do caminho γ , e

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\pi} = \varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_0, y_0),$$

onde $\varphi: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é função potencial de $\vec{F}$.



obs.: Uma curva é reccionalmente suave quando for suave por partes.



[δ não é suave, mas é reccionalmente: de $\delta(a)$ a $\delta(c)$; depois de $\delta(c)$ a $\delta(d)$ e, por último, de $\delta(d)$ a $\delta(b)$]

DEMONSTR. Inmediatamente, considere $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva suave e simples.

Como $\vec{F}$ é um campo conservativo, então $\exists \phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla \phi = \vec{F}$.

$\delta(t) = (x(t), y(t))$; $t \in [a, b]$ uma parametrização. Então:

$$\begin{aligned} \text{Então } (x_0, y_0) &= \delta(a) = (x(a), y(a)) \\ (x_1, y_1) &= \delta(b) = (x(b), y(b)) \end{aligned}$$

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{\gamma} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt =$$

$$= \int_a^b \nabla \phi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt =$$

$$\vec{F} = \nabla \phi$$

$$= \int_a^b \nabla \phi(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) dt$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \cdot \left(\underbrace{x'(t) dt}_{dx}, \underbrace{y'(t) dt}_{dy} \right) =$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \cdot (dx, dy) =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy =$$

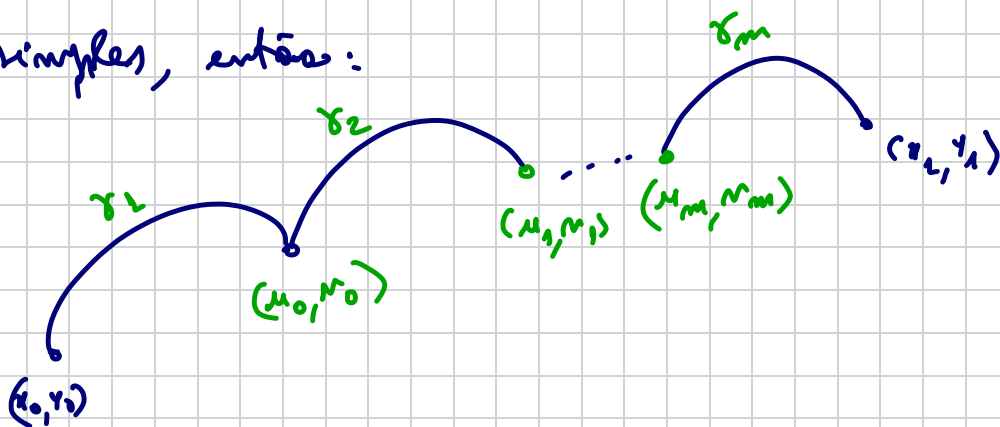
→ DIFERENCIAL TOTAL DA ϕ ; ou
seja $d(\phi(x, y))$

$$= \int_a^b d(\varphi(x, y)) = \int_a^b d(\varphi(x(t), y(t))) =$$

$$= \varphi(x(b), y(b)) - \varphi(x(a), y(a)) =$$

$$= \underline{\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_0, y_0)}, \quad \forall \gamma \text{ parametrização.}$$

2.º caso: se γ for racionalmente suave e simples, então:



Isso provado na primeira parte:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} &= \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} + \dots + \int_{\gamma_m} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} \\ &= \cancel{\varphi(x_0, y_0)} - \cancel{\varphi(x_1, y_1)} + \underline{\varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_3, y_3)} + \dots \end{aligned}$$

$$\cancel{---} + \underline{\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_n, y_n)}$$

$$= \underline{\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_0, y_0)}$$

□