

Nesta aula podemos estudar o teorema de Green, que transforma um cálculo de integral de linha de um campo vetorial $F: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ em uma integral dupla.

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva retilinealmente suave, fechada, simples. Então, sendo

$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ um campo vetorial C^1

então:

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA,$$

onde Ω é a região interna encerrada pela curva fechada γ .

Vimos que uma curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é parametrizada pelo comprimento de arco se $\forall t_1, t_0 \in [a, b]$;

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\| dt = t_1 - t_0.$$

PROPOSIÇÃO: Uma curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, $\|\gamma'(t)\| = 1$.

DEMONSTRAÇÃO:

($\Leftarrow$) Suponha que $\|\gamma'(t)\| = 1$.

Vamos mostrar que $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é parametrizada pelo comprimento de arco.

De fato, dados $t_0, t_1 \in [a, b]$, temos:

$$\int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\|\gamma'(t)\|}_{=1} dt = \int_{t_0}^{t_1} 1 dt = t \Big|_{t_0}^{t_1} = t_1 - t_0$$

Logo, γ é parametrizada pelo comprimento de arco.

($\Rightarrow$) Reciprocamente, suponha que γ seja parametrizada pelo comprimento de arco.

A mostrar: $\|\gamma'(t)\| = 1$.

Define $l(t) = \int_{t_0}^t \|\delta'(x)\| dx$.

Então,

$$l(t) = \int_{t_0}^t \|\delta'(x)\| dx = t - t_0$$

$$\Rightarrow l(t) = t - t_0$$

↑
pois δ é parame-
trizada pelo
comprim. de arco.

Agora, derivando $l(t)$, vamos encontrar:

$$l'(t) = 1.$$

Por outro lado;

$$l'(t) = \frac{d}{dt} l(t) = \frac{d}{dt} \left(\int_{t_0}^t \|\delta'(x)\| dx \right)$$

$$= \|\delta'(t)\|$$

↑
T.F.C. (Partel),
do capítulo 2

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x g(t) dt \right) = g(x)$$

$$\Rightarrow \| \gamma'(t) \| = \ell'(t) = 1. \quad \Rightarrow \underbrace{\| \gamma'(t) \| = 1.}$$

□

EXTENSÃO VETORIAL DO TEOR. DE GREEN:

Nó que segue damos apresentamos extensões vetoriais do T. de Green.

Seja $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva recionalmente suave, simples e fechada; e parametrizada pelo comprimento de arco; dada por

$$\gamma(s) = (x(s), y(s))$$

Seja $\vec{T}(s)$ o vetor tangente à $\gamma(s)$ em um ponto A sobre γ . Então:

$$\vec{T}(s) = \gamma'(s) = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right)$$



Definire também o vetor $\vec{n}(1)$ por:

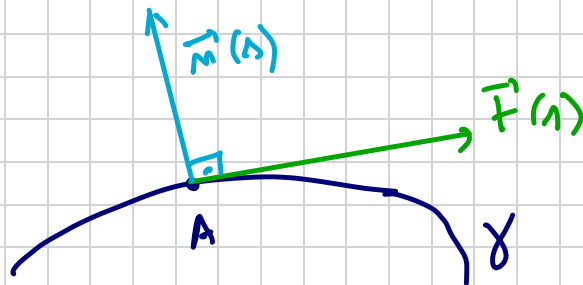
$$\vec{n}(1) = \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right)$$

Então:

$$\underline{\vec{F}(1) \cdot \vec{n}(1)} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right) \cdot \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right)$$

$$= \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{dx}{ds} = \underline{0}$$

Logo, $\vec{n}(1)$ é o vetor normal à $\vec{F}(1)$, e, portanto, normal à curva γ no ponto A.



Seja $\vec{F} = (P, Q)$ um campo vetorial
do $\mathbb{R}^2$.

Então, calculando $\vec{F} \cdot \vec{n}(1)$, teremos:

$$\vec{F} \cdot \vec{n}(1) = (P, Q) \cdot \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right)$$

$$= P \cdot \frac{dy}{ds} - Q \frac{dx}{ds}.$$

Desse forma, a integral sobre γ
do produto escalar entre o campo $\vec{F}$ e
o vetor normal $\vec{n}(1)$ será:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n}(1) ds = \oint_{\gamma} \left(P \frac{dy}{ds} - Q \frac{dx}{ds} \right) \cdot ds$$

$$= \oint_{\gamma} P dy - Q dx = \oint_{\gamma} (-Q) dx + P dy =$$

↑
T. DE
GREEN

$$= \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial P}{\partial x} - \left(-\frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right] dA =$$

$$= \iint_{\Omega} \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right)}_{\text{div } \vec{F}} dA = \iint_{\Omega} \text{div } \vec{F} \cdot dA,$$

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n}(s) ds = \iint_{\Omega} \text{div } \vec{F} \cdot dA.$$

Ou seja, acabamos de provar o seguinte resultado:

TEOREMA DA DIVERGÊNCIA (OU TEOREMA DE GAUSS)

Sejam $\vec{F} = (P, Q)$ um campo vetorial,
 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ um caminho fechado, simples,
 retilineamente suave, e $\vec{n}(s)$ um vetor
 normal à curva γ , onde s é parame-
 trizada pelo comprimento de arco, então:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{m}(s) ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \cdot dA, \quad ,$$

onde Ω é a região interna encerrada pela curva γ .

Usando o vetor tangente $\vec{T}(s) = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right)$,
considerando $\vec{F} = (P, Q, R)$, com $R=0$

calculando a rotacional desse campo, temos:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

$$\Rightarrow \underbrace{\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{k}} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \underbrace{\vec{k} \cdot \vec{k}} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

berechnende

$$\underbrace{\vec{F} \cdot \vec{f}(s)} = (P, Q) \cdot \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right)$$

$$= \underbrace{P \cdot \frac{dx}{ds} + Q \cdot \frac{dy}{ds}}$$

Answer, Green's:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{f}(s) ds = \oint_{\gamma} \left(P \frac{dx}{ds} + Q \frac{dy}{ds} \right) \cdot \cancel{ds}$$

$$= \oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

↑
T. DG
GREEN

"rot $\vec{F} \cdot \vec{k}$ "

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{T}(s) ds = \iint_{\Omega} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{k} \cdot dA ,$$

ou seja, acabamos de mostrar o seguinte resultado:

TEOREMA DE STOKES:

Sejam $\vec{F} = (P, Q)$ um campo vetorial, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ um caminho fechado, simples, racionalmente suave, e $\vec{T}(s)$ um vetor tangente à curva γ , onde γ é parametrizada pelo comprimento de arco, então:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{T}(s) ds = \iint_{\Omega} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{k} \cdot dA ,$$

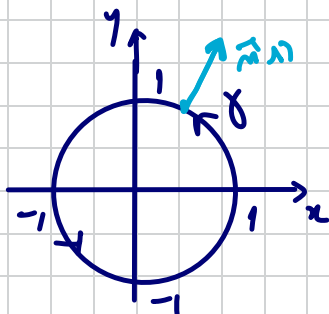
onde Ω é a região interna encerrada pela curva γ .

Veja mos um exemplo.

Ex. Verifique o teorema da divergência para o campo $\vec{F}(x, y) = 2y \vec{i} + 5xy \vec{j}$, sendo γ dada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

$$\lambda \in [0, 2\pi].$$

Solução:



$$\gamma(\lambda) = (\cos \lambda, \sin \lambda)$$

$$\begin{cases} x(\lambda) = \cos \lambda \\ y(\lambda) = \sin \lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{x^2 + y^2}_{=1} = \underbrace{\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda}_{=1}$$

Note que γ é parametrizada pelo comprimento de arco, pois, sendo

$$\gamma'(\lambda) = (-\sin \lambda, \cos \lambda), \text{ temos:}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\|\gamma'(\lambda)\|}_{=1} = \sqrt{(-\sin \lambda)^2 + (\cos \lambda)^2} = \sqrt{\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda} = 1.$$

Então verificamos que

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n}(\lambda) d\lambda = \iint_{\gamma} \operatorname{div} \vec{F} \, dA.$$

sendo $\vec{f}(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$, então

$$\vec{n}'(t) = \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right) = (\cos t, +\sin t)$$

Assim:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n}'(t) dt = \int_0^{2\pi} (2t, 5xy) \cdot (\cos t, \sin t) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (2 \sin t, 5 \cos t \cdot \sin t) \cdot (\cos t, \sin t) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (2 \cdot \sin t \cdot \cos t + 5 \cdot \sin^2 t \cdot \cos t) dt =$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \sin t \cdot \cos t dt + 5 \int_0^{2\pi} (\sin t)^2 \cdot \cos t dt =$$

$$\int u^k du = \frac{u^{k+1}}{k+1} + C$$

$$u = \sin t \Rightarrow du = \cos t dt$$

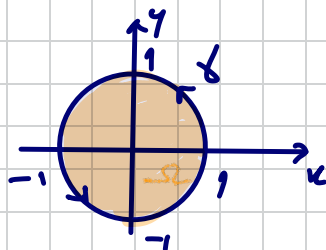
$$= 2 \cdot \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{2\pi} + 5 \cdot \frac{\sin^3 t}{3} \Big|_0^{2\pi} =$$

$$\sin^2 2\pi - \sin^2 0 + \frac{5}{3} \cdot (\sin^3 2\pi - \sin^3 0) = 0 //$$

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n}(n) dn = 0 \quad (*)$$

Por outra lado,

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dA =$$



$$= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dA = \iint_{\Omega} (0 + 5x) dx dy =$$

$$\vec{F} = (\underbrace{2y}_{F_1}, \underbrace{5xy}_{F_2})$$

$$= 5 \iint_{\Omega} x \cdot dx dy = 5 \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=1} \rho \cos \theta \cdot \rho d\rho d\theta =$$

$$= 5 \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \cos \theta \cdot \int_{\rho=0}^{\rho=1} \rho^2 d\rho = 5 \cdot \sin \theta \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^1 =$$

$$= 5 \cdot (\underbrace{\sin 2\pi}_{=0} - \underbrace{\sin 0}_{=0}) \cdot \left(\frac{1}{3} - 0 \right) = 0 //$$

$$\Rightarrow \boxed{\iint_{\Sigma} \operatorname{div} \vec{F} \cdot dA = 0} \quad (**)$$

De (*) e (**) segue o resultado.

— Fim DO CONTEÚDO —

EXERCÍCIOS:

LISTA 12:

13. Use o Teorema da Divergência para mostrar que, dado um campo escalar $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com derivadas parciais contínuas até a segunda ordem no aberto Ω e γ uma curva suave fechada simples em Ω , então

$$\oint_{\gamma} g \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} ds = \iint_{\Omega} (g \Delta g + \|\nabla g\|^2) dA.$$

Obs.: a quantidade $\nabla g \cdot \vec{n} := \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}$ aparece na integral de linha. A derivada direcional de g na direção do vetor normal $\vec{n}$ é chamada de *derivada normal* de g .

A mostrar:

$$\oint_{\gamma} g \cdot \underbrace{\nabla g \cdot \vec{n}}_{\frac{\partial g}{\partial \vec{n}}} ds = \iint_{\Omega} (g \cdot \Delta g + \|\nabla g\|^2) dA.$$

Deo 7. da divergência, sendo $\vec{F}$ um campo vetorial:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n}(s) ds = \iint_{\rightarrow} \operatorname{div} \vec{F} \cdot dA.$$

$$\begin{aligned} \text{Seja } \vec{F} &= g \cdot \nabla g = g \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right) \\ &= \left(\underbrace{g \cdot \frac{\partial g}{\partial x}}_{F_1}, \underbrace{g \cdot \frac{\partial g}{\partial y}}_{F_2} \right) \end{aligned}$$

Neste caso, temos:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(g \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(g \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \right)$$

$$= g \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) + \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + g \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right) + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$= \underbrace{g \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}} + \underbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2} + \underbrace{g \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}} + \underbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2} =$$

$$= g \cdot \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) + \underbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2}_{\|\nabla g\|^2}$$

Δg $\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right)$

$$= g \cdot \Delta g + \|\nabla g\|^2$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{F} = g \cdot \Delta g + \|\nabla g\|^2$$

Assim, segue que; pelo T. da divergência:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n}(t) dt = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \cdot dA$$

$$\oint_{\gamma} g \cdot \nabla g \cdot \vec{n}(t) dt = \iint_{\Omega} (g \cdot \Delta g + \|\nabla g\|^2) dA$$

□

L12

14. Use o Teorema de Green na forma vetorial para provar a primeira identidade de Green:

$$\iint_{\Omega} f \Delta g dA = \oint_{\gamma} f(\nabla g) \cdot \vec{n} ds - \iint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dA,$$

onde Ω e γ satisfazem as hipóteses do Teorema de Green e as derivadas parciais apropriadas de f e g existem e são contínuas.

Solução: Pelo T. da divergência, na formulação genl:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n}(s) ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \cdot dA,$$

$$\text{Tomemos } \vec{F} = f(\nabla g) = f \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right)$$

$$= \left(\underbrace{f \cdot \frac{\partial g}{\partial x}}_{F_1}, \underbrace{f \cdot \frac{\partial g}{\partial y}}_{F_2} \right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \right)$$

$$= \underbrace{f \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}} + \underbrace{f \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial y}}$$

$$\begin{aligned}
 &= f \cdot \left[\underbrace{\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}}_{\Delta g} \right] + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial y}}_{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right)} \\
 &= f \cdot \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g.
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{F} = f \cdot \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g.$$

Portanto, pelo T. da divergência, vamos encontrar:

$$\oint_{\gamma} \underbrace{\vec{F}}_{f \nabla g} \cdot \vec{n} \, ds = \underbrace{\iint \operatorname{div} \vec{F} \, dA}_{\parallel}$$

$\Rightarrow$:

$$\begin{aligned}
 \oint_{\gamma} f \cdot \nabla g \cdot \vec{n} \, ds &= \iint_{\gamma} (f \cdot \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dA. \\
 &= \iint_{\gamma} f \cdot \Delta g \, dA + \iint_{\gamma} \nabla f \cdot \nabla g \, dA.
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \iint_{\gamma} f \cdot \Delta g \, dA = \oint_{\gamma} f \cdot \nabla g \cdot \vec{n} \, ds - \iint_{\gamma} \nabla f \cdot \nabla g \, dA.$$