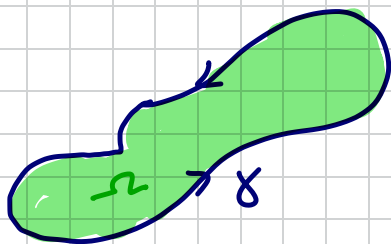


TEOREMA DE GREEN Sejam P e Q funções de duas variáveis reais, com $P, Q \in C^1$ em um disco $D \subset \mathbb{R}^2$, e se γ for uma curva fechada, seccionalmente suave em D , então

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA,$$

onde $\Omega = \text{int}(\gamma)$.

obs. Note que o t. de GREEN transforma uma integral de linha numa integral dupla.



(*) LEMBRE QUE $f \in C^1(\Omega) \Leftrightarrow$ existirem as derivadas parciais de f em Ω e forem contínuas

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA: Seja $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$,
com P e Q nas hipóteses do teorema.

Inicialmente, seja $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma
curva suave, fechada.

O campo vetorial $\vec{F}$ pode ser conservativo ou
não. Vejamos cada caso:

• Se $\vec{F}$ for conservativo, então, como γ é um
caminho fechado, segue por um corolário que

$$\oint_{\gamma} \vec{F} d\vec{\pi} = 0, \text{ ou seja,}$$

$$\oint_{\gamma} \vec{F} d\vec{\pi} = \underbrace{\oint_{\gamma} P dx + Q dy}_{(*)} = 0.$$

Por outro lado, sendo $\vec{F} = (P, Q)$ conservativo,
então tem-se que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \text{ ou seja,}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

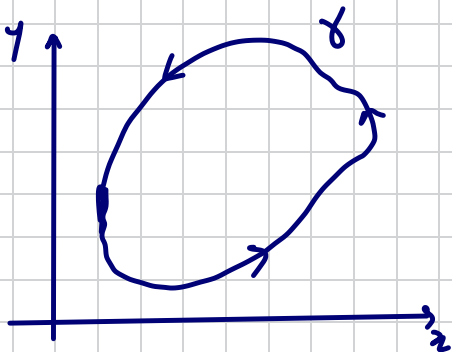
$$\text{Logo, } \iint_{\Omega} \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)}_{=0} dA = 0 \quad (**)$$

onde $\Omega = \text{int}(\gamma)$.

De (*) e (**) segue que

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

• Se $\vec{F}$ não for conservativo: Neste caso, ainda sendo γ curva fechada e simples, mais, considere tal que toda reta vertical que passar por γ a intercepte em no máximo dois pontos.



Então:

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = \oint_{\gamma} P dx + \oint_{\gamma} Q dy$$

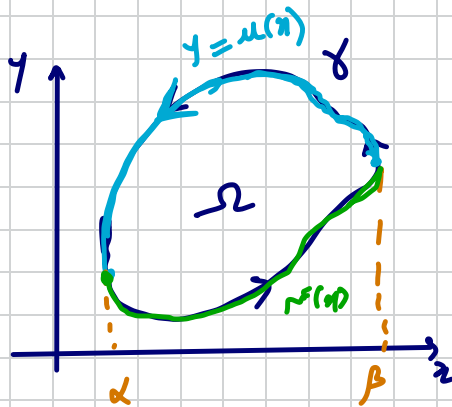
- $\oint_{\gamma} P dx = \oint_{\gamma} P(x, y) dx.$

Sejam $y = u(x)$ e

$y = v(x)$ conforme o esquema:

$$u: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$$



Neste caso, temos:

$$\oint_{\gamma} P(x, y) dx = \int_{\beta}^{\alpha} P(x, u(x)) dx + \int_{\alpha}^{\beta} P(x, v(x)) dx$$

DEVIDO À ORIENTAÇÃO DA CURVA.

$$= - \int_{\alpha}^{\beta} P(x, u(x)) dx + \int_{\alpha}^{\beta} P(x, v(x)) dx =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} [-P(x, u(x)) + P(x, v(x))] dx =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{v(x)}^{u(x)} -\frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \iint_{\Omega} -\frac{\partial P}{\partial y} dy dx = \iint_{\Omega} -\frac{\partial P}{\partial y} dA$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_{\gamma} P dx = \iint_{\Omega} -\frac{\partial P}{\partial y} dA} \quad (I)$$

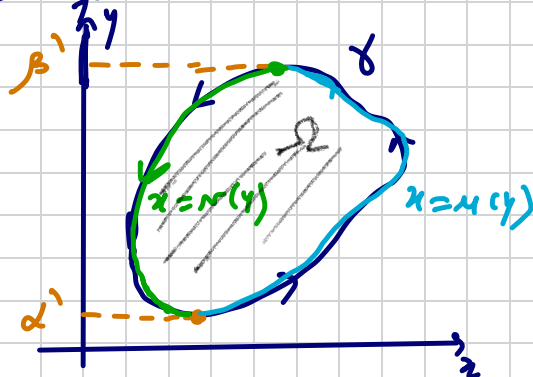
Além disso:

$$\bullet \underbrace{\oint_{\gamma} Q dy}_{\text{verde}} = \oint_{\gamma} Q(x, y) dy.$$

Isone $x = u(y)$

$x = v(y)$ em α', β'

conforme o esquema:



Neste caso, tem-se:

$$\oint_{\gamma} Q dy = \int_{\beta'}^{\alpha'} Q(\nu(y), y) dy + \int_{\alpha'}^{\beta'} Q(\mu(y), y) dy =$$

$$= - \int_{\alpha'}^{\beta'} Q(\nu(y), y) dy + \int_{\alpha'}^{\beta'} Q(\mu(y), y) dy =$$

$$= \int_{\alpha'}^{\beta'} [Q(\mu(y), y) - Q(\nu(y), y)] dy$$

$$= \int_{\alpha'}^{\beta'} \left(\int_{\nu(y)}^{\mu(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy = \iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$$

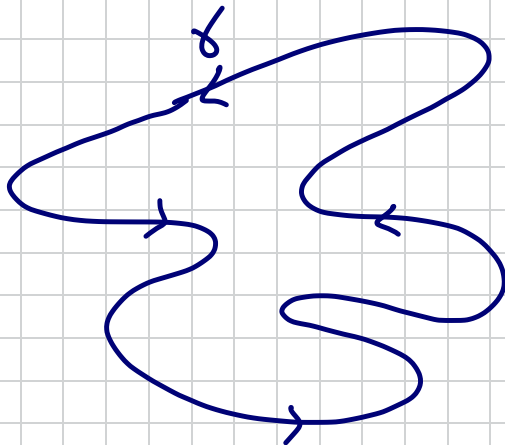
$$= \iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} dA$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_{\gamma} Q dy = \iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} dA} \quad (\text{II})$$

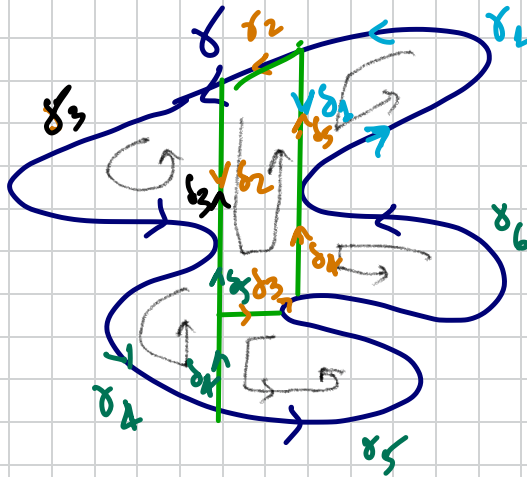
Assim, de (I) e de (II) segue que:

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma} P dx + Q dy &= \oint_{\gamma} P dx + \oint_{\gamma} Q dy = \\&= \iint_{\Omega} -\frac{\partial P}{\partial y} dA + \iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} dA \\&= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.\end{aligned}$$

Considere agora γ tal que uma reta vertical passando por γ a intercepte em mais de dois pontos, como no esquema:



Neste caso, decomparamos γ em curvas menores, com apoio das retas verticais, de modo que as partes menores se encaixem no caso anterior (ou seja, retas verticais interceptem as curvas em no máximo dois pontos)



$$\delta_5 = -\delta_1$$

$$\delta_3 = -\delta_2$$

$$\delta_5 = -\delta_2$$

$\vdots$

O importante a observar é que:

$$\oint_{\gamma} = \oint_{\gamma_1} + \oint_{\delta_1} + \oint_{\gamma_2} + \oint_{\delta_2} + \oint_{\gamma_3} + \oint_{\delta_3} + \oint_{\gamma_4} + \oint_{\delta_4} + \oint_{\gamma_5} + \dots + \oint_{\delta_5} + \dots$$

se cancelam
por serem
sentidos opostos

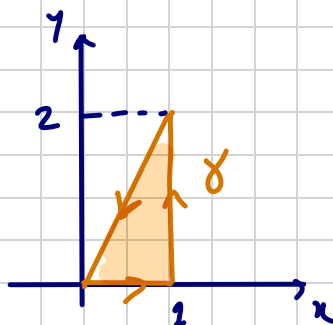
□

Exemplo 1:

01) Use o teorema de Green para calcular

$$\oint_{\gamma} x^2 y dx + x dy, \text{ ao longo do}$$

caminho γ , conforme o esquema:



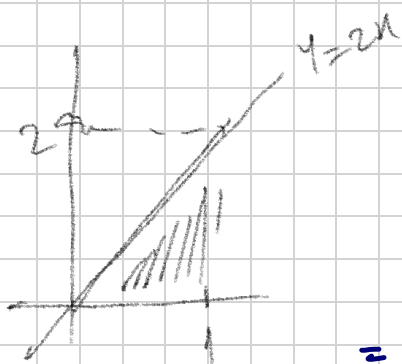
Solução: Seja T. de GREEN:

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

No nosso caso, temos:

$$\begin{cases} P = x^2 y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 \\ Q = x \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} x^2 y dx + x dy = \iint_{\Omega} (1 - x^2) dA =$$



$$= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{y=2x} (1-x^2) dy dx =$$

$$= \int_{x=0}^1 (1-x^2) \cdot y \Big|_0^{2x} dx =$$

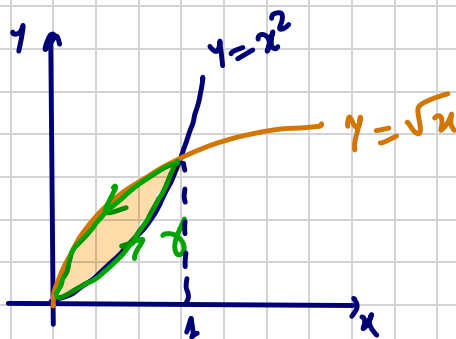
$$= \int_0^1 (1-x^2) \cdot (2x-0) dx = \int_0^1 (2x - 2x^3) dx =$$

$$= \left(x^2 - \frac{x^4}{2} \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} //$$



02) Calcule $\oint_{\gamma} xy dx + x dy$, sendo γ formado pelos arcos de parábola $y=x^2$ e $y=\sqrt{x}$ com $0 \leq x \leq 1$.

Solução:



Solo teorema de Green:

$$\oint_{\gamma} \underbrace{xy dx}_{p} + \underbrace{-x dy}_{q} = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dA \Rightarrow$$

$$\rightarrow p = xy \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = x$$

$$q = -x \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial x} = -1$$

$$\Rightarrow \iint_{\Omega} (1 - x) dA = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} (1-x) dy dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} (1-x) \cdot y \Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = \int_0^1 (1-x) \cdot (\sqrt{x} - x^2) dx$$

$$= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2 - x\sqrt{x} + x^3) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^2 - x^{\frac{3}{2}} + x^3 \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{40 - 20 - 24 + 15}{60} =$$

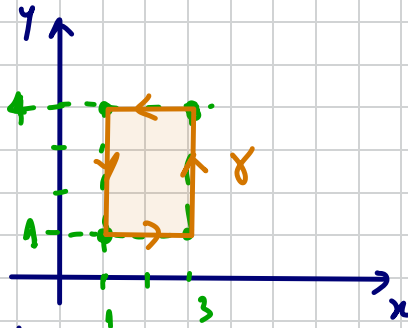
$$= \frac{11}{60}$$



03) Calcule $\oint_{\gamma} (\ln x + y) dx + x^2 dy$, onde γ

é o retângulo de vértices $(1,1)$; $(3,1)$; $(3,4)$; $(1,4)$.

Solução:



Teo T. de Green:

$$P = \ln x + y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

$$Q = x^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} (2x + y) dx + x^2 dy = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA =$$

$$= \iint_{\Sigma} (2x - 1) dx dy = \int_{y=1}^{y=4} \left(\int_{x=1}^{x=3} (2x - 1) dx \right) dy =$$

$$= \int_{y=1}^{y=4} (x^2 - x) \Big|_{x=1}^{x=3} dy = \int_1^4 [(9-3) - (\underbrace{1-1}_{=0})] dy =$$

$$= 6 \int_1^4 dy = 6 \left. y \right|_1^4 = 6 \cdot (4-1) = 6 \cdot 3$$

$$= 18 //$$



Def: Dizemos que uma curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é parametrizada pelo comprimento de arco se,

$\forall t_0, t_1 \in [a, b]$, tivermos

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\| dt = t_1 - t_0$$

